ХМЕЛЬНИЦЬКА ОБЛАСНА РАДА
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ УПРАВЛІННЯ ТА ПРАВА
ІМЕНІ ЛЕОНІДА ЮЗЬКОВА

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з науково-педагогічної роботи

_______________ Ірина КОВТУН
(підпис) (ініціали, прізвище)

23 жовтня 2020 року

м.п.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
з навчальної дисципліни
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»
для підготовки на першому освітньому рівні
здобувачів вищої освіти ступеня бакалавра
за спеціальністю 072 Фінанси, банківська справа та страхування
галузі знань 07 Управління та адміністрування

м. Хмельницький
2020

ЗМІСТ

Стор.

1.	Структура вивчення навчальної дисципліни		–	2
	1.1.	Тематичний план навчальної дисципліни	–	2
	1.2.	Лекції		4
	1.3.	Семінарські (практичні) заняття	–	8
	1.4.	Самостійна робота студентів	–	62
	1.5.	Індивідуальні завдання	–	65
	1.6.	Підсумковий контроль	–	66
2.	Схема нарахування балів		–	68
3.	Рекомендовані джерела		–	69
4.	Інформаційні ресурси в Інтернеті		–	70

1. Структура вивчення навчальної дисципліни

1.1. Тематичний план навчальної дисципліни

№ теми	Назва теми	Кількість годин											
		Денна форма навчання						Заочна форма навчання					
		Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
			Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС		Лекції	Сем. (прак).	Лабор.	Ін.зав.	СРС
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
І семестр													
1	Предмет та задачі дисципліни. Булева алгебра.	10	4	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–
2	Вектори. Матриці. Визначники.	14	6	6	–	–	2	–	–	–	–	–	–
3	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.	16	4	4	–	–	8	–	–	–	–	–	–
4	Функціональна залежність. Границя функції.	12	4	4	–	–	4	–	–	–	–	–	–
5	Неперервність функції. Чудові границі.	10	2	2	–	–	6	–	–	–	–	–	–
6	Похідна. Диференціал	16	4	4	–	–	8	–	–	–	–	–	–
7	Основні теореми диференціального числення. Функції однієї змінної.	16	2	2	–	–	12	–	–	–	–	–	–
8	Невизначений інтеграл.	16	4	4	–	–	8	–	–	–	–	–	–
9	Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів	10	2	4	–	–	4	–	–	–	–	–	–
10	Визначений інтеграл. Невласні інтеграли.	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
	Усього	132	34	34			64						
ІІ семестр													
11	Числові ряди.	8	2	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–
12	Степеневі, тригонометричні, функціональні ряди	12	2	4	–	–	6	–	–	–	–	–	–

13	Загальні відомості про диференціальні рівняння. Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку.	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
14	Диференціальні рівняння вищих порядків. ЛДР вищого порядку з правою частиною спеціального виду	14	2	2	–	–	10	–	–	–	–	–	–
15	Основні поняття математичного програмування. Задача планування виробництва	14	4	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
16	Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП	14	4	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
17	Оптимізаційні економіко-математичні моделі	8	2	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–
18	Транспортна задача. Метод потенціалів	12	2	4	–	–	6	–	–	–	–	–	–
19	Побудова та дослідження багатофакторної економетричної моделі	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
20	Розв'язок задач балансовим методом.	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
21	Імітаційне моделювання: основні поняття та прикладні аспекти	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–
22	Прийняття рішень в умовах повної інформації (визначеності)	12	4	2	–	–	6	–	–	–	–	–	–
23	Системи та методи прийняття рішень в умовах ризику	14	2	4	–	–	8	–	–	–	–	–	–
24	Системи та методи прийняття рішень в умовах невизначеності. Задачі масового обслуговування	12	2	2	–	–	8	–	–	–	–	–	–

	Усього	168	34	34			100							
	Всього годин:	300	68	68	–		164							

1.2. Лекції

№ з/п	Назва і план теми	Денна форма
1	2	3
	І семестр	
1	**Предмет та задачі дисципліни. Булева алгебра**	4
1.1. 1.2. 1.3. 1.4.	Значення математичної освіти як важливої складової у системі фундаментальної підготовки сучасного фінансиста. Приклади вибору математичних методів для розв'язування економічних задач Множини: дійсні, раціональні та ірраціональні. Комплексні числа. Булева алгебра: конюнкція, дизюнкція, імплікація, еквіваленція.	
	Вектори. Матриці. Визначники.	6
2.1. 2.2. 2.3. 2.4. 2.5. 2.6.	Визначники другого і третього порядків. Визначники к-го порядку. Властивості визначників. Мінори і алгебраїчні доповнення. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця. Способи обчислення визначників. Правило Крамера розв'язування систем *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими. Види матриць. Елементарні перетворення матриць. Ранг матриці. Добуток матриці. Обернена матриця. Добуток прямокутних матриць. Додавання матриць і множення матриць на число. Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці. Матричне рівняння.	
	Системи лінійних рівнянь	4
3.1. 3.2. 3.3. 3.4.	Поняття про системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи лінійних рівнянь. Сумісні і несумісні системи рівнянь. Визначені і невизначені системи лінійних рівнянь. Розв'язування систем рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гауса). Розв'язування систем рівнянь методом повного виключення невідомих (методом Жордано-Гауса).	
	Функціональна залежність. Границя функції	4
4.1. 4.2. 4.3. 4.4.	Поняття функції. Способи задавання функції. Область визначення та область значень функції. Властивості функцій: обмеженість і необмеженість, зростання й спадання функції, парність і непарність, періодичність. Класифікація функцій. Елементарні функції та їх графіки. Поняття оберненої функції. Числова послідовність. Означення границі послідовності. Нескінченно малі та великі величини. Означення границі функції. Односторонні границі. Властивості функцій, що мають скінченні границі.	

	Неперервність функції. Чудові границі	2
5.1. 5.2. 5.3. 5.4. 5.5.	Невизначені вирази. Границя монотонної функції. Число *e*. Натуральні логарифми. Означення неперервності функції в точці. Неперервність функції на відрізку. Арифметичні операції над неперервними функціями. Класифікація розривів. Властивості неперервних функцій. Неперервність елементарних функцій. Чудові границі границі. Необхідні границі.	
	Похідна. Диференціал	4
6.1. 6.2. 6.3. 6.4.	Застосування похідної в економічних розрахунках. Означення похідної. Геометричний, механічний та економічний зміст похідної. Похідні елементарних функцій. Похідна оберненої функції. Таблиця похідних. Правила обчислення похідних. Похідна складної функції. Односторонні похідні. Похідні вищих порядків.	
	Основні теореми диференціального числення. Функції однієї змінної.	2
7.1. 7.2. 7.3. 7.4.	Визначення диференціалу. Диференціал суми, добутку і частки. Інваріантність форми першого диференціалу. Диференціали вищих порядків. Основні теореми диференціального числення. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші. Правило Лопіталя.	
	Невизначений інтеграл.	4
8.1. 8.2. 8.3. 8.4.	Поняття первісної функції і невизначеного інтегралу. Застосування інтегралів у задачах економіки. Геометричний і механічний зміст інтегралу. Таблиця основних інтегралів. Найпростіші правила інтегрування. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами.	
	Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів	2
9.1. 9.2. 9.3. 9.4.	Інтегрування раціональних дробів. Інтегрування не правильних дробів. Інтегрування ірраціональних виразів та виразів, що містять тригонометричні функції. Тригонометричні підстановки	
	Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. Кратні інтеграли	2
10.1. 10.2. 10.3. 10.4.	Інтегральні суми. Умови існування визначеного інтегралу. Властивості визначеного інтегралу. Обчислення інтегралу. Формула Ньютона-Лейбниця. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Наближене обчислення визначеного інтегралу. Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площ, об'ємів тіл обертання, довжин дуг кривих. Поняття невласних інтегралів.	

II семестр		
	Числові ряди	2
11.1. 11.2. 11.3. 11.4.	Частинні суми ряду. Необхідна умова збіжності ряду. Ряди з додатними членами. Теорема порівняння рядів. Достатні ознаки збіжності рядів із додатними членами: Даламбера. Коші, інтегральна ознака Маклорена-Коші	
	Степеневі, тригонометричні, функціональні ряди	2
12.1. 12.2. 12.3. 12.4.	Знакозмінні ряди та їх види. Абсолютна й умовна збіжність рядів. Теорема Лейбниця. Ознака залишку знакоперемінного ряду.	
	Загальні відомості про диференціальні рівняння. Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку	2
13.1. 13.2. 13.3. 13.4.	Поняття диференціального рівняння і його розв'язків. Застосування диференціальних рівнянь у задачах економічної динаміки. Диференціальні рівняння першого порядку. Загальний розв'язок і загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку. Частинний розв'язок диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.	
	Диференціальні рівняння вищих порядків. ЛДР вищого порядку з правою частиною спеціального виду	2
14.1. 14.2. 14.3.	Однорідні рівняння другого порядку. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. ЛДР вищого порядку з правою частиною спеціального виду	
	Основні поняття математичного програмування	4
15.1. 15.2. 15.3.	Загальна постановка задач. Економічні приклади моделей лінійного програмування (задача оптимального використання сировини, задача оптимізації виробничої програми). Задача складання сумішей (раціону).	
	Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП	4
16.1. 16.2. 16.3. 16.4.	Задача лінійного програмування, форми її запису. Дослідження задачі лінійного програмування. Теоретичні основи симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування. Розв’язування задач лінійного програмування з допомогою MS Excel	
	Оптимізаційні економіко-математичні задачі. Задача планування виробництва	2
17.1. 17.2. 17.3.	Модель оптимізації виробничої програми підприємства Методи побудови компромісних планів Модель оптимізації процесу фінансування з урахуванням часового фактора.	

17.4. 17.5.	Модель оптимальної структури інвестиційного портфеля Модель оптимізації процесу управління ліквідністю банку	
	Транспортна задача. Метод потенціалів	2
18.1. 18.2. 18.3.	Постановка транспортної задачі, умова існування її розв'язку. Пошук оптимального плану перевезень за методом потенціалів. Розв'язування транспортної задачі за допомогою MS Excel.	
	Побудова та дослідження економетричної моделі	2
19.1. 19.2. 19.3. 19.4.	Модель парної лінійної регресії Діаграма розсіювання регресійної функції Метод найменших квадратів Коефіцієнти кореляції та детермінації	
	Розв'язок задач балансовим методом	2
20.1. 20.2. 20.3. 20.4. 20.5.	Модель багатогалузевої економіки Леонтьєва Модель міжнародної торгівлі Простір товарів. Вектор цін Модель рівноваги ринку Модель рівноваги доходів і збитків	
	Імітаційне моделювання	2
21.1. 21.2. 21.3. 21.4.	Основні поняття та особливості імітаційного моделювання Моделюючий алгоритм і формалізована система процесу Принцип побудови імітаційних моделюючих алгоритмів Метод Монте-Карло та перевірка статистичних гіпотез	
	Прийняття рішень в умовах повної інформації (визначеності)	4
22.1. 22.2. 22.3. 24.4.	Множина Еджворта–Парето Метод варіювання зваженої суми критеріїв Метод аналізу ієрархій Методи аналізу колективних рішень	
	Системи та методи прийняття рішень в умовах ризику та конфлікту	2
23.1. 23.2. 23.3.	Критерій сподіваного значення Критерій “сподіване значення - дисперсія” Критерій граничного рівня	
	Системи та методи прийняття рішень в умовах невизначеності. Задачі масового обслуговування	2
24.1. 24.2. 24.3. 24.4. 24.5. 24.6. 24.7.	Критерій Лапласа Критерій Вальда Критерій Севіджа Критерій Гурвіца Критерій Байєса (максимум середнього виграшу) Критерій мінімуму середнього ризику Критерій Ходжеса-Лемана	

1.3. Семінарські заняття

Семінарське заняття 1

Тема Предмет та задачі дисципліни. Множини. Булева алгебра.

Питання для усного опитування та дискусії

1. Предмет та задачі дисципліни.
2. Множини: дійсні, раціональні та ірраціональні.
3. Комплексні числа.
4. Булева алгебра: конюнкція, дизюнкція, імплікація, еквіваленція.

Аудиторна письмова робота

Підключитися до Google Classroom. Код доступу надає викладач на лекціях.

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : дійсні, раціональні та ірраціональні числа, конюнкція, дизюнкція, імплікація, еквіваленція. Висловлення та операції над ними. Логічні закони і відношення логічного слідкування. Предикати. Область істинності предикатів. Операції над предикатами. Квантори. Теореми та їх види. Прями й обернені теореми. Необхідні й достатні умови.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Життя людини у сучасному насиченому інформаційному просторі неможливе без знання передових інформаційних технологій. Розвиток останніх, неможливий без фундаментальних знань сукупності сучасних математичних методів аналізу та синтезу. Багато людей вважають, що математика ніяк не пов'язана з реальним життям, не цікава і важка для вивчення. Отже, з однієї сторони ми бачимо падіння інтересу до математики, а з іншого боку, ми живемо в більш математичному світі, більш кількісному, ніж будь-коли. Особливість математичних дисциплін полягає в їхній надзвичайній складності для сприйняття сучасними студентами, які жити не можуть без ґаджетів, а також розуміння, що це можна використовувати в реальному житті. Питання, які повинні зустрітися в повсякденному житті. Наприклад, яка страхова програма вигідніша? Це не якась знеособлена модель. Це реальна модель, де ми можемо оптимізувати параметри. На скільки років мені потрібна страхівка? Як це впливає на платежі і відсоткові ставки? Розгляд економічних питань у процесі вивчення математики та задач з реальним економічним змістом дозволяють продемонструвати студентам наявність глибоких і плідних зв'язків між математикою і економікою, а через них - і взаємозв'язки математики з проблемами навколишнього світу, але це практично неможливо зробити без комп'ютера і ПЗ, яке візуалізує і моментально демонструє результати проробленої роботи:

Математична логіка - *наука про закони математичного мислення.*

Висловленням називають розповідне речення, про яке можна сказати, що воно або істинне, або хибне, але не одне й інше разом.

Кон'юнкцією (або логічним добутком) двох висловлень A і B називають висловлення, яке є істинним, коли кожне з висловлень A і B істинне, і є хибним, коли хоча б одне з них хибне.

Диз'юнкція Диз'юнкцією (або логічною сумою) двох висловлень A і B називають висловлення, яке є істинним, коли хоча б одне з висловлень A або B істинне, і є хибним, коли обидва хибні.

Імплікація Імплікацією (або логічним слідуванням) двох висловлень A і B називають таке висловлення A B, яке є хибним тоді і тільки тоді, коли A - істинне, а B - хибне.

Еквіваленцією двох висловлень A і B називається таке висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти A і B однозначно істинні або однозначно хибні.

Приклад: Петі потрібно знати 4 екзамена, тоді сесія здана, в протилежному випадку не здана. Читається: « A **еквівалентне** B», «A ***тоді і тільки тоді, коли*** B».

Опрацювати записи конспекту.

Вивчити основні означення. Виконати завдання:

№1: Навести кілька прикладів висловлень та їх заперечень.

№2: Навести кілька прикладів диз'юнкції двох висловлень.

№3: Навести кілька прикладів кон'юнкції двох висловлень.

№4: Навести кілька прикладів імплікації двох висловлень.

№5:Навести кілька прикладів еквіваленції двох висловлень.

Семінарське заняття 2-4

Тема. Вектори. Матриці. Визначники

Питання для усного опитування та дискусії

1. Скалярні, векторні величини. Основні операції над векторами.
2. Визначники, їх властивості.
3. Матриці, дії з ними.
4. Поняття про модель Леонтьєва.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські та індивідальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські завдання, відповідна тема.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : скаляр, вектор, скалярний добуток, визначник, порядок визначника, матриця, додавання матриць, множення матриці на число, добуток матриць, одинична матриця, невироджена матриця, мінор, алгебраїчне доповнення, обернена матриця, математична модель, модель Леонтьєва.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

1. Вектори (основні поняття).

Скалярні величини повністю характеризуються своїм числовим значенням у вибраній системі одиниць (наприклад, час, температура та ін.).

Векторні величини, крім того, мають напрямок у просторі (наприклад, сила, швидкість та ін.). Векторну величину (вектор) можна зобразити відрізком у просторі (умовившись про одиницю масштабу). Цей відрізок орієнтований (вказано його початок і кінець); орієнтація позначається стрілкою. **Модуль** (довжина) вектора – це скаляр. Вектор позначають так: $\overline{a};\overline{AB}$, а його модуль – так: $|\overline{a}|,|\overline{AB}|$.

Отже, задати вектор – це задати його модуль і напрямок у просторі.

Два вектора рівні, якщо вони мають однаковий модуль, паралельні та направлені в одну й ту ж саму сторону.

Скалярний добуток векторів.

Проекцією вектора $\overline{a}$ на вісь $\overline{l}$ називається довжина відрізка $A'B'$ між основами перпендикулярів, опущених з точок А та В на вісь $\overline{l}$, причому ця довжина береться із знаком + або – в залежності від того, співпадає напрямок відрізка $A'B'$ з напрямком осі $\overline{l}$ чи н.

Перейдемо до вивчення скалярного добутку.

Скалярний добуток двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ – це добуток модулів цих векторів та косинуса кута між ними:

$$\overline{a}\overline{b}=\left(\overline{a};\overline{b}\right)=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right).$$

За допомогою проекцій можна дати ще й таке означення скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного вектора на проекцію на нього другого вектора.

$$\overline{a}\overline{b}=|\overline{b}|\cdot np._{\overline{b}}\cdot\overline{a}=|\overline{a}|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}.$$

Лінійний простір – це сукупність об’єктів, над якими можна, залишаючись у межах цієї сукупності, виконувати лінійні дії.

Нехай (R) – сукупність (множина) деяких об’єктів (елементів). Множина (R) називається **лінійним простором**, якщо $\forall x\in(R), y\in(R)$ визначене поняття суми $x+y\in R$, а $\forall$ дійсного числа λ визначене $\lambda x=x\lambda\in(R)$.

Наприклад, (R) – сукупність векторів; сукупність всіх комплексних чисел.

Елементи будь-якого лінійного простору називаються **векторами** (або узагальненими векторами).

Визначники другого порядку.

Визначником (детермінантом) другого порядку називається вираз

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

Приклад: розв’язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases}7x-6y=5\\ 8x-7y=-10\end{cases}$$

Розв’язування.

Маємо: $D=\begin{vmatrix}7 & -6\\ 8 & -7\end{vmatrix}=7\cdot(-7)-8\cdot(-6)=-1(\neq 0),$

$D_x=\begin{vmatrix}5 & -6\\ -10 & -7\end{vmatrix}=5\cdot(-7)-(-6)\cdot(-10)=-95;$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-10) - 5 \cdot 8 = -110$$

Підставимо значення визначників, одержуємо розв'язок системи :

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-95}{-1} = 95;$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-110}{-1} = 110$$

Відповідь: формули (11) дають розв'язок системи (7): $x = 95; y = 110$.

Визначники третього порядку.

<u>Визначником (детермінантом) третього</u> порядку називається вираз

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

<u>**Приклад**</u>: обчислимо визначник $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. Користуючись означенням, маємо:

$$D = 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0+4) - 0 + 2(-2-0) = 4 - 4 = 0.$$

<u>**Мінором елемента визначника**</u> третього порядку, який одержується з даного визначника в результаті викреслювання строчки і стовпчика, на перетині яких стоїть даний елемент.

<u>**Наприклад**</u>, мінор елемента 5 визначника $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ – це визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3$.

Говорять, що <u>**елемент займає парне місце**</u>, якщо сума номерів його стрічки і стовпчика – число парне, і <u>**непарне місце**</u>, якщо сума номерів його сторчки і стовпчика – число непарне.

<u>**Наприклад**</u>, елемент 5 в попередньому прикладі займає непарне місце, бо знаходиться в 1-ій строчці і в 2-му стовпчику, а 1+2=3 – число непарне.

<u>**Алгебраїчним доповненням**</u> (мінором із знаком) елемента визначника третього порядку називається мінор цього елемента, взятий із знаком "плюс", якщо елемент займає парне місце, і із знаком "мінус", якщо непарне місце.

<u>**Приклад**</u>, для визначника виду $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ алгебраїчне доповнення елемента a_1 – це число $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, алгебраїчне доповнення елемента b_3 – це число $B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (алгебраїчне доповнення елементів позначаються відповідними великими буквами з тими ж самими індексами).

Якщо елементи визначника представлені як a_{ij} (i – номер строчки, j – номер стовпчика), тобто якщо $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то, позначивши через M_{ij} мінор елемента a_{ij}, через A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, маємо:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

(Тут $(-1)^{i+j}$ забезпечує зміну знаків: якщо $i + j$ – число парне, то $(-1)^{i+j} = 1$, а якщо $i + j$ – число непарне, то $(-1)^{i+j} = -1$).

Стрічки і стовпчики визначника називають його **<u>рядами</u>**.

Має місце така теорема про обчислення визначника третього порядку.

Основні властивості визначників.

Відзначимо основні властивості визначників (спираючись на визначники 3-го порядку).

1) Визначник не змінює свого значення, якщо його строчки замінити відповідними стовпчиками (операціями називається транспонуванням визначника):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2) При перестановці двох паралельних рядів визначника його абсолютна величина зберігає попереднє значення, а знак змінюється на протилежний.

З другої властивості випливає два наслідки: а) визначник, у якого два паралельних ряди однакові, дорівнює нулю (дійсно, якщо $-D = D$, то $D = 0$);

б) Сума добутків елементів якого-небудь ряду визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного ряду дорівнює нулю (так, наприклад, $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$, бо це – розкладений по 2-ій стрічці визначник $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, який дорівнює нулю, оскільки перший і другий рядок однакові).

3) Спільний множник k елементів якого-небудь ряду визначника можна виносити за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Наслідки:

а) якщо всі елементи деякого ряду визначника дорівнюють нулю, то цей визначник дорівнює нулю;

б) якщо елементи якого-небудь ряду визначника пропорційні відповідним елементам паралельного ряду, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

4) Якщо елементи якого-небудь ряду визначника дорівнюють сумі двох доданків, то визначник може бути розкладений на суму двох відповідних визначників:

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+\alpha_1)A_1 + (b_1+\beta_1)B_1 + (c_1+\gamma_1)C_1 = (a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) +$$

$$+(\alpha_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Приклад</u>.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = -55+14 = -41$$

(перший рядок множимо на (-2) і додаємо до другого; перший рядок множимо на 3 і додаємо до третього). Завдяки властивостям визначників для обчислення визначника третього порядку нам довелося обчислювати не три, а лише один визначник другого порядку.

Аналогічно тому, як ми ввели означення визначника третього порядку через визначники другого порядку, можна ввести поняття про визначники четвертого порядку через визначники третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

Основи теорії визначників закладені в 1750 році швейцарським математиком Г. Крамером (1704 – 1752).

Матриці та дії з ними

Матрицею називається прямокутна таблиця, складена з чисел або з функцій.

Приклад: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}.$

Цю таблицю записують в круглих або в квадратних дужках (на відміну від визначників). Розміри матриці записують так: $m \times n$, де m – число стрічок, n – число стовпчиків. Так, наведені вище матриці мають відповідно такі розміри: $3\times 2; 2\times 3; 2\times 2$.

Якщо число стрічок матриці дорівнює числу її стовпчиків, то матриця називається квадратною (остання з наведених матриць є квадратною матрицею другого порядку).

Матриця, у якої всього один стовпчик або одна стрічка, називається вектором. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою. Квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю (крім, можливо, елементів, що стоять на головній діагоналі), називається діагональною. Квадратна матриця, у якої всі елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці, а інші – нулю, називається одиничною матрицею і позначається E (або I).

Обернена матриця.

Квадратна матриця називається невиродженою, якщо її визначник відмінний від нуля.

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо виконуються умови:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

де E – одинична матриця.

Можна довести, що будь-яка невироджена матриця має обернену, причому елементами оберненої матриці є алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці до вихідної матриці *A:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Семінарське заняття 5-6

Тема. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

<u>*Питання для усного опитування та дискусії*</u>

1. Формули Крамера.
2. Метод Гаусса.
3. Матричний метод розв'язування систем рівнянь.
4. Ранг матриці.

<u>*Аудиторна письмова робота*</u>

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : формули Крамера, прямий хід метода Гаусса, зворотний хід метода Гауса, матричний метод, ранг матриці, метод обвідних мінорів, зведення матриці до трапецієвидної форми, теорема Крон екера – Капеллі, сумісність (несумісність) системи рівнянь.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

1. Метод Крамера.

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{1}$$

<u>**Розв'язком**</u> системи (1) називається будь-яка трійка чисел $(x; y; z)$, яка задовольняє систему.

Введемо до розгляду визначник системи D, а також визначники Dx, Dy, D_z за формулами:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dx = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dy = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, Dz = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Якщо $D \neq 0$, то система (1) має єдиний розв'язок, що визначається <u>формулами Крамера</u>:

$$x = \frac{Dx}{D}, y = \frac{Dy}{D}, z = \frac{Dz}{D}$$

(2)

(Якщо $D=0$, то система (1) або несумісна, або має безліч розв'язків)

2. Метод Гаусса.

Існують і інші методи розв'язування систем рівнянь. Покажемо, як розв'язують систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими методом Гаусса. (К. Гаусс, 1777 – 1855 – великий німецький математик); *n>2.*

Проілюструємо метод Гаусса на прикладі, який ми розв'язали методом Крамера. (тут $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$). Перше рівняння системи є зведеним. Проілюструємо прямий хід метода Гаусса за допомогою перетворення таблиці коефіцієнтів вихідної системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -6 & -14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Здійснюючи обернений хід, одержуємо: $z=0$;

$y+0=2$ (отже, $y=2$);

$x+2+0=3$ (отже, $x=1$).

Обидві відповіді співпали.

3. Розв'язування систем матричним методом.

За допомогою матриць система трьох лінійних неоднорідних рівнянь з трьома невідомими запишеться так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$AX = B$$

(тут A – матриця виду $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, X – вектор виду $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, B – вектор виду $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$). Припустимо, що $\det A \neq 0$.

Домножимо обидві частини рівняння (1) зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки, $A^{-1}A = E, EX = X$, одержуємо:

$$X = A^{-1}B$$

Зауважимо, що метод оберненої матриці (матричний метод) особливо зручний, коли потрібно розв'язати декілька систем рівнянь з однаковими лівими частинами та різними стовпчиками вільних членів – такі системи мають однакову обернену матрицю.

4.Ранг матриці та способи його обчислення.

Нехай ми маємо прямокутну матрицю А розміром $m \times n$.

<u>Рангом матриці А</u> $(rangA = r_A = r)$ називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Так, <u>наприклад</u>, ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює нулю, а матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює двом.

Якщо в матриці А є відмінний від нуля мінор порядку k, а всі мінори $k+1$-го порядку або дорівнюють нулю, або не існують, то $r_A = k$.

Семінарське заняття 7-8

Тема . Функціональна залежність. Границя функції і послідовності

<u>Питання для усного опитування та дискусії</u>

1. Функція однієї та багатьох змінних.
2. Послідовність, її границя.
3. Границя функції однієї і багатьох змінних.
4. Основні теореми про границі.
5. Приклади відшукання границь.

<u>Аудиторна письмова робота</u>

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: функція однієї змінної, функція багатьох змінних, послідовність, границя послідовності, границя функції однієї змінної, границя функції багатьох змінних, перша «чудова» границя, друга «чудова» границя, теореми про границі.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Функція однієї змінної

Якщо кожному значенню змінної x, що належить деякій області, відповідає одне певне значення другої змінної y, то y є <u>функція від x</u>: $y = f(x)$.

Сукупність значень x, для яких визначаються значення функції y в силу правила $f(x)$, називається <u>областю визначення функції</u>.

До <u>основних елементарних функцій</u> відносяться:

1) степенева функція $y = x^{\alpha}$ (α - дійсне число);
2) показникова функція $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);
3) логарифмічна функція $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);
4) тригонометричні функції $- y = \sin x, y = \cos x, y = tgx$;
5) обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$.

<u>Елементарною функцією</u> називається функція, яка може бути заданою однією формулою виду $y = f(x)$, де вираз справа складений із основних елементарних функцій і сталих за допомогою скінченого числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення і взяття функції від функції.

<u>Алгебраїчною функцією</u> називається будь-яка функція $y = f(x)$, яка задовольняє рівняння виду

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0,$$

де $P_0, P_1, \ldots, P_n$ – многочлени від x.

До алгебраїчних функцій належать такі елементарні функції:

а)<u>ціла раціональна функція</u> (многочлен)

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

(тут $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коефіцієнти, n – ціле невід'ємне число – степінь многочлена);

б) <u>дробово-раціональна функція</u>

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

(тут a_i, b_j – коефіцієнти, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, n та m – цілі невід'ємні числа – степені многочленів у чисельнику і знаменнику);

в) **<u>Ірраціональна функція</u>**: якщо в формулі $y = f(x)$ у правій частинні виконуються операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональними нецілими показниками, то функція $y = f(x)$ називається ірраціональною (наприклад, $y = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}$).

Функція, яка не є алгебраїчною, називається **<u>трансцендентною</u>** (наприклад, $y = e^{-x}$).

Функція двох змінних

Якщо кожній парі (x, y) значень двох, незалежних одна від другої, змінних величин x і y з деякої області їх зміни D відповідає певне значення величини *z*, то говорять, що *z* є <u>функцією двох незалежних змінних</u> x і y, визначено в області D. *(z= z (x,y); (z=f(x,y); z=F(x,y)* і т.п.)

Сукупність пар (x, y) значень x і y, при якій визначена функція $z = z(x, y)$, називається <u>областю визначення</u> цієї функції.

Областю визначення функції може бути вся площина або деяка її частина. Лінія, яка обмежує дану область, називається її <u>границею</u>. Точки області, які не лежать на границі, називаються внутрішніми точками області. Область, що складається із самих тільки внутрішніх точок, називається **<u>відкритою</u>** (незамкненою). Якщо до області відносяться і точки границі) то область **<u>замкнена</u>**.

Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Перед тим, як перейти до вивчення питання про границю послідовності і границю функції, пригадаємо з лекції що таке нескінченно мала і нескінченно велика величини.

Зазначимо, що з усієї множини змінних величин можна виділити такі, у яких процес зміни відбувається особливим чином.

<u>Означення</u>. Змінна величина x називається <u>нескінченно малою</u>, якщо у процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної x стає і залишається менше будь-якого, як завгодно малого, наперед заданого додатного числа ε, тобто $|x| < \varepsilon$. Зокрема, єдиного нескінченно малою величиною серед сталих величин є величина O.

Нескінченно малі величини, позначають, як правило, буквами грецького алфавіту α, β, γ.

Означення. Змінна величина x називається нескінченно великою, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина x стає і залишається більше будь-якого, як завгодно великого, наперед заданого додатного числа N, тобто $|x| > N$.

Наприклад, величина 3^n при необмеженому зростанні n є нескінченно великою величиною.

Постійна величина a називається границею змінної величини x, якщо $|x-a|$ – нескінченно мала величина (тобто $|x-a| < \varepsilon$). Якщо a є границею змінної величини x, то говорять, що x прямує до границі a і позначають:

$$\lim x = a, \text{ або } x \to a.$$

Звідси випливає, що $\lim \alpha = 0$, де α – нескінченно мала величина. Нескінченно велика величина x скінченої границі не має $(\lim x = \pm\infty)$.

Знаходження границі відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин називають розкриттям невизначеності їх відношення.

Границя послідовності

Означення. Число c називається границею послідовності $\{u_n\}$ (це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = c$), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі члени u_n послідовності з номерами $n > N$ задовольняють умову: $|u_n - c| < \varepsilon$.

У деяких випадках говорять, що $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$. Це означає, що $|u_n|$ необмежено зростає при $n \to \infty$.

Означення. Скінченну границю послідовності $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ називають числом е

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число е – ірраціональне; що приблизно дорівнює 2,7182818....

Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай залежна змінна x необмежено наближається до числа x_0 (це означає, що x приймає значення, як завгодно близькі до x_0, але відмінні від x_0): $x \to x_0$.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, що досить мало відрізняються від числа x_0, відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Інакше кажучи, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \neq x_0$, які належать δ-околу точки x

$$|x - x_0| < \delta,$$

буде виконуватися нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

то число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$. (Це – означення границі, запропоноване Коші).

Семінарське заняття 9

Тема. Неперервність функції. Точки розриву

Питання для усного опитування та дискусії

1. Неперервність функції однієї змінної.
2. Точки розриву, їх класифікація.
3. Теореми про неперервні функції.
4. Неперервність функції двох змінних.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : неперервність функції однієї змінної у точці (на інтервалі), неперервність функції двох змінних у точці (в області), точка розриву першого роду, точка розриву другого роду, точка ліквідного розриву, точка нескінченного розриву, теореми Вейєрштрасса, теореми Больцано - Коші.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо ця функція визначена в якому-небудь околі цієї точки (включаючи дану точку) і якщо нескінченно мальму приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Функція називається неперервною в інтервалі, якщо вона неперервна у всіх точках інтервалу. Геометрично неперервність функції у замкненому інтервалі означає, що графіком функції є суцільна лінія.

Якщо для функції $y=f(x)$ умова неперервності в точці x_0 порушена, то ця точка називається точкою розриву функції. Точка розриву функції називається точкою розриву першого роду, якщо у цій точці функція має ліву і праву скінченні границі. Якщо, зокрема, ці границі рівні між собою, але функція $f(x)$ при $x=x_0$ не визначена (або визначена, проте не рівна цим границям), то x_0 називають точкою ліквідовного розриву. Всі точки розриву, які не є точками розриву першого роду, називаються точками розриву другого роду (це, зокрема, точки нескінченного розриву).

Мають місце так звані **перша і друга "чудові" границі:**

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$ (перша "чудова" границя);

$$\lim_{\alpha \to \infty} (1 + \frac{1}{\alpha})^{\alpha} \varepsilon$$ (друга "чудова" границя);

Так наприклад, за допомогою першої "чудої" границі знаходимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}k\frac{\sin kx}{kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=1.$$

За допомогою другої “чудової” границі знаходимо:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}\cdot k}=\varepsilon^{k}.$$

Семінарське заняття 10-11

Тема Похідна. Диференціал

<u>*Питання для усного опитування та дискусії*</u>

1. Похідна функції однієї змінної, її геометричний, фізичний, економічний зміст.
2. Таблиця похідних.
3. Частинні похідні та їх економічні застосування.
4. Диференціал функції однієї та двох змінних.
5. Похідні і диференціали вищих порядків.

<u>*Аудиторна письмова робота*</u>

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : похідна, частинна похідна, геометричний зміст звичайної похідної, фізичний зміст звичайної похідної, економічний зміст звичайної і частинної похідної, таблиця похідних, диференціал функції однієї змінної, диференціал функції двох змінних, похідні і диференціали вищих порядків, формула Тейлора (випадок функції однієї і двох змінних).

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

1. Похідна, її фізичний, геометричний та економічний зміст.

Нехай ми маємо функцію $y=f(x)$, визначену в деякому проміжку. Знайдемо приріст функції в точці x:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ та знайдемо $\lim\limits_{\Delta x\to x}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (якщо ця границя існує).

<u>Похідною</u> функції $y=f(x)$ по аргументу x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну позначають так: $f'(x)$; $y_{x'}$; $\dfrac{dy}{dx}$

Операція знаходження похідної від функції $f(x)$ називається <u>**диференціюванням**</u> цієї функції.

Дамо **економічну інтерпретацію** похідної.

Нехай витрати виробництва k є функцією обсягу продукції x.

Границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta k}{\Delta x} = k'(x)$ називають граничними витратами виробництва. Нехай, наприклад, функція витрат $k(x)$ має вигляд:

$$k(x) = 400x - 0{,}01x^2$$

Знайдемо $k'(x)$:

$$k'(x) = 400 - 0{,}02x .$$

Оскільки реальний економічний зміст x мають лише цілі x, то можна написати наближену рівність:

$$k(x+1) - k(x) = k'(x), \ \ \Delta x = 1 .$$

Таким чином, функція $k'(x)$ показує, наскільки зміняться витрати при збільшенні виробництва на одиницю. Наприклад, $k'(50) = 400 - 0.02 \cdot 50 = 399$. Це означає, що при збільшенні обсягу виробництва з 50 до 51 одиниці витрати виробництва зростуть на 399 одиниць.

2. Диференційовність та неперервність функцій

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0, тобто якщо існує

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то функцію $f(x)$ при даному значенні $x = x_0$ називають **диференційованою**.

Похідні від елементарних функцій.

Правила диференціювання (теореми про сталий множник, про похідну суми, добутку і частки)

Користуючись означенням похідної, можна знайти похідні від таких елементарних функцій.

1) $y = C$ (C – стале число). Покажемо, що $C' = 0$: $\Delta y = C - C = 0$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. (Студентам рекомендується дати геометричне тлумачення цього факту).

2) $y = \sin x$. Покажемо, що $y' = \cos x$. Маємо: $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Знаходимо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 2\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \Delta x)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$

(ми скористалися першою “чудовою” границею).

При знаходженні похідних елементарних функцій користуються теоремами про сталий множник, про похідну суми, добутку і частки.

Диференціювання складної, наявної, оберненої функції

а) Має місце така теорема про диференціювання складної функції.

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має в деякій точці похідну $u'_x = \varphi'(x)$, а функція $y = F(u)$ має при відповідному значенні u похідну $F'(u) = y'_u$, тоді складна функція $y = F(\varphi(x))$ у вказаній точці x теж має похідну, яка дорівнює $y'_x = y'_u u'_x$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \ln \sin x$. Тут $y = \ln u$, де $u = \sin x$. Маємо:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctgx$$

Аналогічно, якщо $y = F(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то $y'_x = y'_u u'_v v'_x$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sin^2 x^{\frac{1}{3}}$. Тут $y = u^2$, де $u = \sin v$, причому $v = x^{\frac{1}{3}}$. Маємо: $y_x = 2\sin x^{\frac{1}{3}} \cos x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3^3\sqrt{x^2}} \sin 2^3\sqrt{x}$.

Таблиця основних формул диференціювання

Наведемо таблицю основних формул диференціювання.

Функція	Її похідна	Функція	Її похідна
c	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	a^x	$a^x \ln a$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}\left(=\frac{\log_a e}{x}\right)$ (зокрема, $\frac{1}{x}$ при $a = e$)

Диференціал та його геометричне значення

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку $[a,b]$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отже, приріст функції Δy є сумою двох доданків: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ (припустимо; що $f'(x) \neq 0$). Отже, при $\Delta x \to 0$ перший доданок, тобто $f'(x)\Delta x$, є нескінченно малою величиною першого порядку відносно Δx, а $\alpha\Delta x$ – нескінченно малою вищого порядку відносно Δx.

Добуток $f'(x)\Delta x$ називається диференціалом функції і позначають dy або $df(x)$.

Похідні та диференціали вищих порядків

Похідна від першої похідної називається другою похідною (або похідною другого порядку): $(f'(x))' = y''$. Похідною n-го порядку від функції $f(x)$ називається перша похідна від $(n-1)$-ої похідної: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x)$.

Семінарське заняття 12

Тема. Основні теореми диференціального числення функції однієї змінної

Питання для усного опитування та дискусії

1. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші.
2. Правила Лопіталя.
3. Дослідження функції однієї змінної на монотонність, екстремум і на напрямок вигнутості.
4. Асимптоти графіка функції.
5. Загальна схема побудови графіка функції.
6. Застосування похідної в економіці.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші, перше правило Лопіталя, друге правило Лопіталя, вертикальна асимптота, похила асимптота, монотонне зростання, монотонне спадання, екстремум (мінімум, максимум), вгнутість, увігнутість, точка перегину.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

3Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші

Диференціальне числення застосовують для дослідження функцій. Наведемо теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші.

Теорема Ферма. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому інтервалі $[x_1, x_2]$, приймає своє найбільше (або найменше) значення у внутрішній точці ξ цього інтервалу: $x_1 < \xi < x_2$. Якщо в точці ξ похідна функції $f(x)$ існує, то вона обов'язково дорівнює нулю: $f'(\xi) = 0$.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$, диференційована у всіх його внутрішніх точках та приймає на кінцях інтервалу рівні значення, то в цьому інтервалі існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого $f'(\xi) = 0$.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$ і диференційована у всіх його внутрішніх точках, то в цьому інтервалі існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в замкненому інтервалі $[x_1, x_2]$ та диференційовні у всіх його внутрішніх точках, причому $\varphi'(x)$ у цих точках не перетворюється в нуль, то в цьому інтервалі існує хоча б одне значення $x = \xi$, для якого

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Правило Лопіталя

Наведемо правило Лопіталля граничного переходу, яким зручно користуватися при дослідженні функцій.

<u>Правило Лопіталя</u>. Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) сумісно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю скінченну чи ні, то і відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних:

$$\underset{x\to x_0}{\text{дшь}}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{/}(x)}{\varphi^{/}(x)}, \ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varepsilon(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f^{/}(x)}{\varepsilon^{/}(x)}.$$

<u>Приклад</u>, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x'}{\left(e^x\right)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$.

Деколи цим правилом доводиться користуватися декілька разів.

Загальна схема дослідження функцій

Можна рекомендувати таку схему дослідження функцій

1) Знайти область визначення функції її точки розриву.
2) Вияснити питання про парність, періодичність, характерні точки функції.
3) Визначити інтервали знакосталості та монотонності функції.
4) Знайти екстремуми функції.
5) Дослідити функцію на вигнутімть і увігнутість.
6) Знайти вертикальні і похилі графіка функцій (якщо вони існують)
7) На основі одержаної інформації побудувати графік функцій.

Зауважимо, що окремі пункти цієї схеми можна переставляти місцями. Можна також проводити додаткове дослідження в залежності від функції – наприклад, шукати lim*f(x)* і т.п.

Завдання біля дошки: Провести повне дослідження та побудувати графік функцій

$$y = \frac{x^3}{2 - x^3}.$$

Об’єднаючи одержану інформацію, будужмо графік функції $y = \dfrac{x^3}{2 - x^2}$ (рис.1)

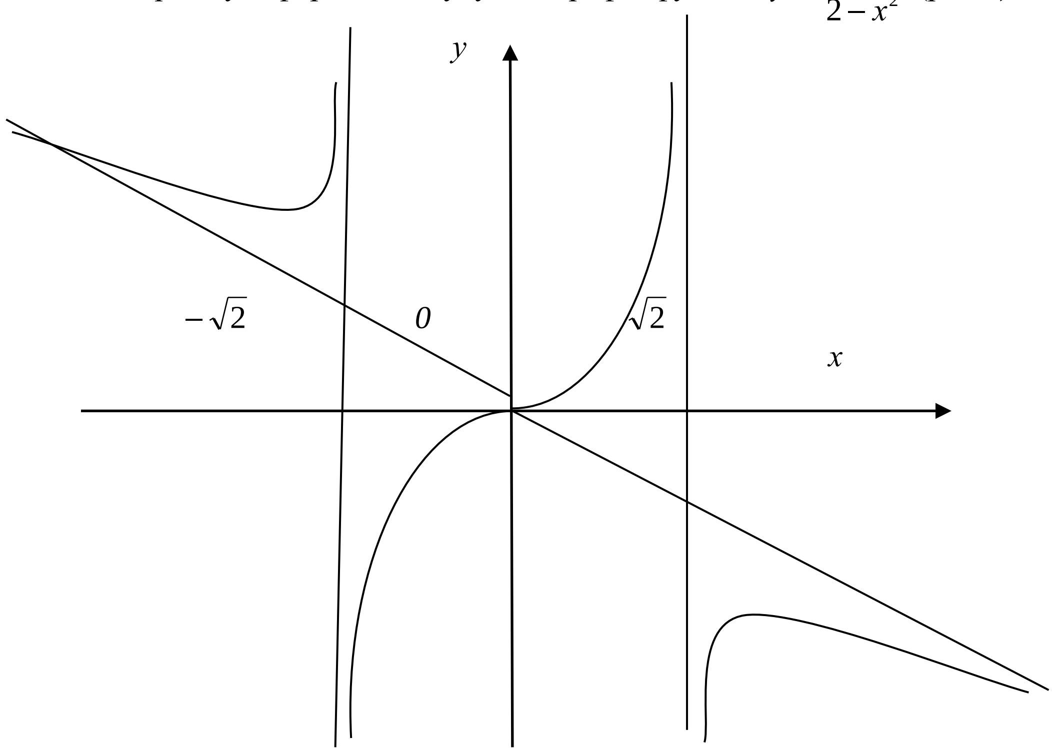


Рис.1.Графік функції $y=\dfrac{x^3}{2-x^2}$

Застосування похідної в економіці

У практиці економічних досліджень широке застосування одержали *виробничі функції*, які використовуються для виявлення залежностей випуску продукції від витрат ресурсів, при прогнозуванні розвитку галузей, при розв'язуванні оптимізаційних задач. Наприклад, якщо виробнича функція $y=f(x)$ встановлює залежність випуску продукції y від витрат ресурсу x, то $f'(x)$ називають *граничним продуктом*; якщо ж $y=f(x)$ встановлює залежність витрат виробництва y від об'єму продукції x, то $f'(x)$ називають *граничними витратами*.

Для вивчення відносної зміни приросту функції $y=f(x)$ при малих відносних змінах приросту аргументу x використовують *коефіцієнт еластичності функції* (або *еластичність*).

Нехай задана функція $y=f(x)$, а Δx і Δy – прирости незалежної і залежної змінної, причому $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. Відносний приріст залежної змінної – це вираз виду $\dfrac{\Delta y}{y}$. Відношення відносно приросту функції до відносного приросту незалежної змінної $\dfrac{\Delta y}{y}:\dfrac{\Delta x}{x}$ показує, у скільки разів відносний приріст функції більший за відносний приріст незалежної змінної. Представимо його у формі:

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}.$$

Якщо функція *y=f(x)*диференційована, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right)=f'(x)\frac{x}{y}$$

.

Границя відношення відносного приросту функції $y=f(x)$ до відносного приросту незалежної змінної, коли $\Delta x\to 0$, називається *еластичністю функції $y=f(x)$ відносно змінної x*.

Еластичність функції $y=f(x)$ позначимо символом $E_x(y)$:

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Еластичність функції допускає таку економічну інтерпретацію: еластичність – це наближений процентний приріст функції, що відповідає приросту незалежної змінної на 1%.

$$y=-0{,}14+1{,}37x.$$

Семінарське заняття 13-14

Тема. Невизначений інтеграл. Комплексні числа

Питання для усного опитування та дискусії

1. Задача інтегрального числення. Первісна.
2. Невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця інтегралів.

3. Заміна змінних та інтегрування по частинах у невизначеному інтегралі.
4. Комплексні числа, операції над ними.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є: первісна, інтеграл, таблиця інтегралів, безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінних), інтегрування по частинах, комплексне число, алгебраїчна форма комплексного числа, тригонометрична форма комплексного числа..

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Невизначений інтеграл

Первісна функція. невизначений інтеграл.

Основна задача диференціального числення – це знаходження похідної або диференціала заданої функції. Сформулюємо обернену задачу по заданій похідній або диференціалу деякої невідомої функції потрібно знайти цю функцію. Інакше кажучи, маючи $dF(x) = f(x)dx$ або $F'(x) = f(x)$, потрібно знайти невідому функцію $F(x)$. Це – основна задача інтегрального числення.

Первісною функцією для даної функції $f(x)$ на даному проміжку називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$ або диференціал якої дорівнює $f(x)dx$ на розглядуваному проміжку.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

Враховуючи означення невизначеного інтеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

можна легко довести основні його властивості

1) Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, а похідна – підінтегральній функції:

$$\underline{d\int f(x)dx = f(x)dx,} \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2) Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференційованої функції дорівнює самій цій функції з точністю до сталого доданка:

$$\underline{\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + c.}$$

Зауважимо, що в підкреслених виразах знаки d і $\int$ взаємно знищують один одного. В цьому розумінні, як вже згадувалося, диференціювання та інтегрування є <u>взаємно оберненими</u> математичними операціями.

3) Відмінний від нуля сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

Дійсно: $A\int f(x)dx = A(F(x) + c) = AF(x) + c_1 \quad (c_1 = AC)$.

При цьому $AF(x)$ – первісна для Af, оскільки $(AF)' = AF' = Af$.

4) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа неперервних функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі невизначених інтегралів цих функцій.

Таблиця найпростіших інтегралів.

Безпосереднім диференціюванням перевіряється справедливість наступних табличних формул.

1. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1)$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$.
3. $\int e^x dx = e^x + c$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + c$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$.
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$.
11. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + c$.
12. $\int \dfrac{dx}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1} + c\right|$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + c \quad (\alpha \neq 0)$.
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + c$.
15. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + c$.
16. $\int \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$.
17. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$.

Відзначимо такі корисні для інтегрування властивості диференціала

1) $dx = d(x+b), b - const$
2) $dx = \dfrac{1}{a}d(ax), a \neq 0$
3) $dx = \dfrac{1}{2}d(ax+b), (a \neq 0)$
4) $xdx = \dfrac{1}{2}d(x^2)$
5) $\sin xdx = -d(\cos x)$
6) $\cos xdx = d(\sin x)$

Наведемо ще деякі приклади.

№3 $\int \dfrac{xdx}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$.

№4 $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$

№5. $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + c$.

№6 $\int \sqrt{x+1}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1) = \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c.$

№7. $\int tgxdx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c.$

Інтегрування методом заміни змінної (способом підстановки) та по частинах.

Існує два основних методи інтегрування – метод заміни змінних (спосіб підстановки) а) та метод інтегрування по частинах б).

а) Нехай потрібно знайти $\int f(x)dx,$ який не є табличним інтегралом (але відомо, що існує). Виконаємо в підінтегральному виразі заміну: $x = \varphi(t)$ (тут $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні функції, причому існує обернена функція $\varphi^{-1}(t)$).

Б) Формула інтегрування частинами: $\int udv = uv - \int vdu.$

Наприклад.

№1. $\int x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin xdx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c.$

№2. $\int \ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$

Комплексним числом називається вираз виду z=a+bi, де а та в- дійсні числа.

Тут а-дійсні, а в-уявна частина комплексного числа, а $i = \sqrt{-1}$ -уявна одиниця (зауважимо, що деколи уявною частиною називають *ві*) Загальноприйнятті такі позначення:

a=Re z, b=Imz

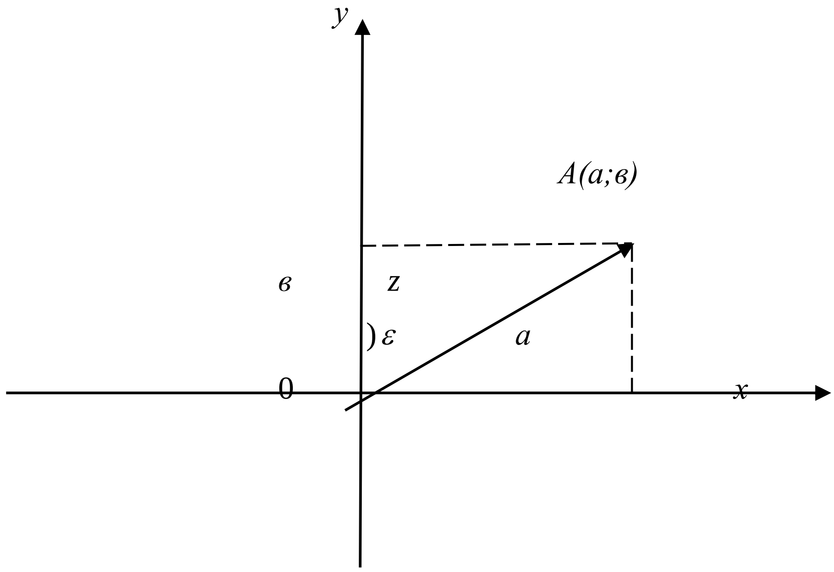
(вод re/el-дійсний, imaginaire-уявний - дійсний,)

Два комплексних числа $z_1=a_1+в_1i$ та $z_2= a_2+в_2i$ вважаються рівними ($z_1= z_2$), якщо рівні їх дійсні та уявні частини:

$а_1= а_2$, $в_1= в_2$.

Комплексне число дорівнює нулю, якщо а=в=0 якщо в=0. то комплексне число співпадає з дійсним: а+ві=а. Якщо а=0, то *z*=ві- одержуємо чисто уявне число. Числа $a \pm в$ називаються спряженими. Число $z_1=-a-вi$- називається протилежними до числа *z*.

Комплексні числа можна зобразити точками площини (в той час, як дійсні числа-точками числової осі ох). Комплексне число а+ві ототожнюються з парою чисел(а,в) координатами точки площини (в прямокутній декартовій системі координат хоу) оскільки кожній точці А площини відповідає радіус-вектор $\overline{OA}$, будь-яке комплексне число можна також інтерпретувати геометрично як вектор $\overline{OA}$ з координатами(а,в) (рис.2)



Розглянемо дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

Нехай задано два комплексних числа $z_1=a_1+в_1i$ та $z_2= a_2+в_2i$ (надалі така форма їх запису називається алгебраїчною). Означимо основні дії з ними-додавання, віднімання, множення і ділення.

1) Сумою $z_1+ z_2$ комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число z, дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина-сумі уявних частин чисел z_1 і z_2: $z=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

Операція додавання комплексних чисел асоціативна: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

та комутативна: $z_1+z_2= z_2+z_1$.

2) Різницею z_1-z_2 комплексних чисел z_1 та z_2 називається комплексне число z , що є сумою числа z_1 та числа, протилежного до z_2 : $z= z_1+(-z_2)= a_1+b_1i+(-a_2-b_2i)= a_1-a_2+(b_1-b_2i$.

3) Добутком z_1 , z_2 комплексних чисел z_1 та z_2 називається комплексне число

$$z=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_1+a_2b_2)i$$

Таким чином, добуток визначається за звичайними правилами алгебри:

$$z= z_1 z_2(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)= a_1a_2-a_1b_2i+b_2b_2i^2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2).$$

Операція множення комплексних чисел асоціативна:

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3=z_1 \cdot (z2 \cdot z3)$

та комутативна: $z_1z_2= z_2z_1$.

4) Часткою $\frac{z_1}{z_2}$ комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число z таке, що $z_1=z\, z_2 \cdot (z_2 \neq 0)$.

Практично комплексні числа ділять так:

$$\frac{(a_1+b_1i)}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b\,b_2)+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2-(b_2i)^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Додавання і множення комплексних чисел пов'язані законом дистрибутивності: $(z_1+z_2)z_3= z_1z_3+ z_2z_3$.

Семінарське заняття 15-16

Тема. Інтегрування раціональних та ірраціональних виразів

Питання для усного опитування та дискусії

1. Найпростіші дроби та їх інтегрування.
2. Інтегрування правильних і неправильних раціональних дробів.
3. Інтегрування найпростіших ірраціональних виразів.
4. Інтегрування тригонометричних функцій.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : найпростіші (елементарні) дроби 1-го, 2-го, 3-го, 4-го типу, правильний раціональний дріб, неправильний раціональний дріб, найпростіші ірраціональності, три випадки інтегровності диференціального бінома, універсальна тригонометрична підстановка.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах

Інтегрування раціональних дробів.

Інтегрування дробів.

Для інтегрування раціональних дробів перш за все перевіряють, правильний дріб чи ні. Якщо дріб неправильний, потрібно виділити цілу частину та правильний дріб, шляхом ділення чисельника на знаменник. Ціла частина – це многочлен, який легко інтегрується. Дробову ж частину записують у вигляді суми найпростіших раціональних дробів і інтегрують.

Зупинимося детально на інтегруванні дробів 1- го, 2- го, 3- го та 4- го типів

I. $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c;$$

II. $$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c;$$

III. $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} +$$
$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{y^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Приклад №1. Знайти $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+4}dx.$

Розвязок. Оскільки дріб неправильний, поділимо чисельник на знаменник, таким чином,

$$\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2+4}dx = \int \left(x^3 - 3x + \frac{12x-1}{x^2+4}\right)dx = \int x^3dx - 3\int xdx + \int \frac{12x-1}{x^2+4}dx =$$
$$\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 6\ln\left(x^2 4\right) - \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + c.$$

Приклад №2. Знайти $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)}$.

Розв'язок. Представимо правильний підінтегральний дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$. Маємо:

$x = Ax + 2A + Bx^2 - 2B + Bx + Cx^2 - 2Cx + c.$ Система для визначення A, B, C:

$$\begin{cases} \tilde{N} + B = 0 \\ A + B + 2C = 1 \\ 2A - 2B + C = 0. \end{cases}$$

Розв’язуючи її, одержуємо: $A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{9}, C = -\frac{2}{9}$.

Отже, $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)} = \int \frac{\frac{1}{3}dx}{(x-1)^2} + \int \frac{\frac{2}{9}dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{2}{9}dx}{x+2} = \frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{2}{9}\ln|x-1| -$
$-\frac{2}{9}\ln|x+2| + c = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{2}{9}\ln|x+2| + c.$

Інтегрування найпростіших ірраціональностей.

Інтеграл від будь-якої раціональної функції виражається через елементарні функції – через раціональні функції, логарифми та арктангенси. Інтеграл від ірраціональної функції не завжди можна виразити через елементарні функції. Нижче будуть розглянуті випадки, коли за допомогою тієї чи іншої підстановки задача інтегрування ірраціональних чи трансцендентних функцій зводиться до інтегрування дробово-раціональних функцій і, отже, вирішується за допомогою елементарних функцій.

Приклад. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} = \left| \begin{matrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{matrix} \right| = 4\int \frac{t^5dt}{t^3+1} = 4\left(\int t^2dt - \int \frac{t^2dt}{t^3+1} \right) =$
$= 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\ln|t^3+1| \right) + c = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}} - \ln\left| x^{\frac{3}{4}} + 1 \right| \right) + c.$

Приклад. Звести інтеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$ до інтеграла від дробово-раціональної функції.

Розв’язок. Виконаємо заміну змінних $\frac{1-x}{1+x} = t^2$. Звідси

$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}.$

Отже, $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x^2} = -4\int t\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}\frac{tdt}{(1+t^2)^2} = -4\int \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}.$

Інтегрування тригонометричних функцій.

Розглянемо інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx.$ Цей інтеграл за допомогою <u>універсальної тригонометричної підстановки $tg\frac{x}{2}=t$</u> зводиться до інтеграла від раціональної функції.

Дійсно, маємо:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$x = 2arctgt; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$ Таким чином, інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ раціонально виражається через t.

<u>Приклад.</u> $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c.$

В деяких випадках більш доцільно користуватися не універсальною тригонометричною підстановкою (якщо вона призводить до громіздких виразів під знаком інтеграла), а іншими методами.

1) Інтеграл виду $\int R(\sin x)\cos x dx$ зручно знаходити за допомогою тригонометричної підстановки $t=\sin x.$ Тоді $dt = \cos x dx,$ і ми одержуємо $\int R(t)dt.$

2) Аналогічно задача знаходження інтеграла виду $\int R(\cos x)\sin x dx$ розв’язується шляхом введення підстановки $t=\cos t.$

3) Щоб перейти від інтеграла $\int R(tgx)dx$ до інтеграла від раціональної функції, досить виконати підстановку $t = tgx.$ Дійсно при цьому $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, і ми одержуємо інтеграл від раціональної функції виду

$$\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Якщо $\sin x$ та $\cos x$ містяться під знаком інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)dx$ лише в парних степенях, то доцільною є підстановка $t = tgx.$ При цьому $dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

<u>Приклад.</u> Знайдемо інтеграл $\int \cos^4 x dx$.

Маємо:

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2} \right) dx =$$

$$\frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x \right) + c = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right) + c .$$

Семінарське заняття 17

Тема. Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. Кратні інтеграли

Питання для усного опитування та дискусії

1. Визначений інтеграл (означення, властивості, способи обчислення).
2. Невласні інтеграли першого і другого роду.
3. Подвійні та потрійні інтеграли, їх властивості, способи обчислення.
4. Застосування інтегралів.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : інтегральна сума, визначений інтеграл, геометрична інтерпретація визначеного інтеграла, заміна змінних у визначеному інтегралі, інтегрування по частинах у визначеному інтегралі, невласні інтеграли першого роду, невласні інтеграли другого роду, подвійні інтеграли, правильна область (в напрямку осі Ox, осі Oy), двохкратні інтеграли, потрійні інтеграли, трьохкратні інтеграли, обчислення площ, об'ємів, довжини дуги за допомогою інтегралів.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Визначений інтеграл. Невласні інтеграли 1-го і 2-го роду.

Якщо при будь-якому діленні відрізка $[a;b]$ такому, що $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ і при довільному виборі точок ξ_i сума $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ прямує до однієї й тієї ж самої границі I , то говорять, що функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$, а границю I називають визначеним інтегралом від $f(x)$ на $[a;b]$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$ ::

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Число a називають нижньою межею інтеграла, ab – його верхньою межею. Проміжок $[a;b]$ називають відрізком інтегрування, а x – змінною інтегрування.

Властивості визначеного інтеграла.

Визначений інтеграл має властивості, які можна сформулювати за допомогою знаків рівностей або нерівностей.

1) Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

Дійсно, $\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\max_i Dx_i \to 0} \sum_{i=1}^n Af(\xi_i)\Delta x_i =$

$$= A \lim_{\max_i Dx_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx$$

2) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми кількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від доданків.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Це дійсно так, оскільки $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} (f_1(\xi_i) + f_2(\xi_1))\Delta x_i = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0}\left(\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i\right) =$

$$= \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Формула Ньютона-Лейбніца.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Дійсно, якщо $F(x)$ – яка-небудь первісна від неперервної функції $f(x)$, то, оскільки $\int_a^x f(t)dt$ – також її первісна, маємо:

$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c^*$, де c^* – стала.

Для визначення цієї сталої покладемо в останній рівності $x = a$:

$\int_a^a f(t)dt = F(x) + c^*,$ або $O = F(a) + c^*.$ Звідси одержуємо: $c^* = -F(a)$. Таким чином, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$. Підставивши $x = b,$ одержуємо формулу Ньютона-Лейбніца, яка встановлює зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами. Цю формулу записують ще так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Для обчислення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x) \in C[a;b]$, можна ввести нову змінну t за формулою: $x = \varphi(t)$. Якщо:

а) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b;$

б) $\varphi(t), \varphi'(t)$ неперервні при $t \in [\alpha;\beta];$

в) $f(\varphi(t))$ – визначена і неперервна функція на відрізку $[\alpha;\beta]$, то має місце формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

<u>Приклад</u>, $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \begin{vmatrix} 1+x=t^2 & x=0 & t=1 \\ dx=2tdt & x=1 & t=\sqrt{2} \end{vmatrix} = \int_1^{\sqrt{2}} t-2tdt = 2\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt = \frac{2}{3}t^2\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$

При потребі користуються формулою інтегрування по частинах:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

<u>Приклад.</u> $\int_o^{e-1} \ln(x+1)dx = \begin{vmatrix} u=\ln(x+1) & du=\dfrac{dx}{x+1} \\ dv=dx & v=x \end{vmatrix} = x\ln(x+1)\Big|_o^{e-1} - \int_o^{e-1}\frac{xdx}{x+1} = (e-1)\ln(e-1+1)-$

$-0-\int_o^{e-1}\frac{(x+1)-1}{x+1}dx = e-1-\int_o^{e-1}dx + \int_o^{e-1}\frac{d(x+1)}{x+1} = e-1-x\Big|_0^{e-1} + \ln|x+1|\Big|_0^{e-1} = e-1-(e-1)+\ln(e-1+1)-$

$-\ln 1 = e-1-e+1+1=1.$

Невласні інтеграли.

I. Розглянемо інтеграли з нескінченними границями, або невласні інтеграли першого роду.

Нехай $x\in[a;\infty)$, а функція $f(x)$ неперервна. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то вона називається <u>невласним інтегралом</u> від $f(x)$ на проміжку $[a;\infty)$ і позначається так: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Отже, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

Якщо $\int_a^b f(x)dx$ при $b\to+\infty$ не має скінченої границі, то говорять, що $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не існує (або розбігається).

Кратні інтеграли. Подвійні і потрійні інтеграли – це узагальнення поняття визначеного інтеграла на інтеграл по плоскій області (частині площини) та на інтеграл по об’ємній замкненій області. Обчислення подвійних інтегралів зводиться до двохкратного інтегрування, а потрійних – до трьохкратного інтегрування. При вивченні теми «Кратні інтеграли» слід звернути особливу увагу на поняття правильної двохвимірної (та правильної трьохвимірної) областей, на порядок розстановки меж інтегрування, на правила заміни змінних при інтегруванні.

Застосування визначеного інтеграла

1. Обчислення площі.

Як зазначалося раніше, за допомогою визначеного інтеграла можна знаходити площу криволінійної трапеції, обмеженої неперервною при $x\in[a;b]$ функцією $f(x)$ (при $f(x)\ge 0$), прямими $x=a$, $x=b$ та віссю ox: $S=\int_a^b f(x)dx$.

Для знаходження площі у випадку, представленому на рис. 2, користуються формулою: $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$.

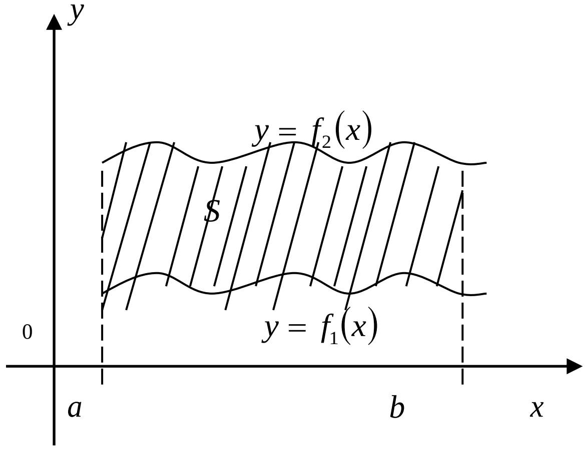


Рис. 2. Площа $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$.

Економічне застосування інтеграла.

Визначений інтеграл має багато інших геометричних, фізичних, механічних застосувань тощо. Зупинимося на деяких його економічних застосуваннях, що пов’язані з сумарними ефектами.

1) За допомогою визначеного інтеграла можна визначати загальний дохід, якщо відомий граничний прибуток. Нехай, наприклад, функція граничного доходу задається формулою

$$MR = -0.04x + 12,$$

де x – кількість поданих одиниць товару. Визначимо дохід від продажу 100 одиниць товару.

Розв'язок $M = \int_0^{100} (-0.04x + 12)dx = \left(-0.04\frac{x^2}{2} + 12x \right)\Big|_0^{100} = \left(-0.02x^2 + 12x \right)\Big|_0^{100} = 1000$ (грн.)

2) Визначений інтеграл дозволяє розв’язувати задачу визначення додаткової вартості.

Нехай задано функції пропозиції $S = 15p$ та попиту $q = p^2 - 80p + 1500.$ (рис. 3).

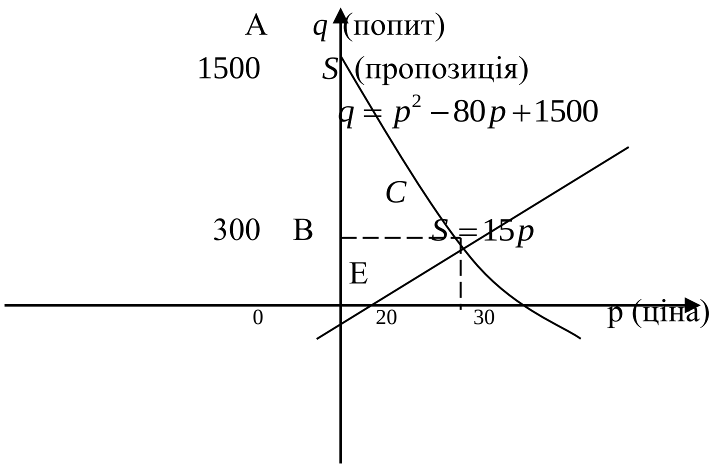


Рис. 3. задача про додаткову вартість.

Визначаємо, що $q = S$ при $p = 20$. При цьому попит дорівнює 300 одиниць. Дохід за продану продукцію становить для виробника 20*300=6000 грн та зображається площею прямокутника *OBCE*. Економічний зміст має ціна за одиницю товару, більша за 20 грн (якщо попит перевищує пропозицію, то, звичайно, знайдуться покупці, які куплять товар дорожче, ніж за 20 грн). мірою справжньої корисності товару, вважають економісти, є площа фігури $OBCD$. Площа заштрихованої фігури (криволінійного трикутника CDE) називається додатковою вартістю. Визначимо цю площу за допомогою інтегралу

$$\int_{20}^{30}\left(p^2 - 80p + 1500\right)dp = \left(\frac{p^3}{3} - 80\frac{p^2}{2} + 1500p\right)\Bigg|_{20}^{30} = 1333.33 \text{ грн.}$$

Отже, додаткова вартість дорівнює 1333,33 грн.

Приклад. Для подолання наслідків стихійного лиха в деяку місцевість надходять благодійні внески, розмір яких наближено описується функцією $a(t) = 30e^t\left(t \in [0;3]\right)$, причому t вимірюється в днях від моменту стихійного лиха, а $a(t)$ – в тисячах гривень. Визначити:

a) скільки внесків надійде на другий день $(t = 2)$?

b) яка сума внесків очікується за три дні з моменту початку стихійного лиха?

Розв'язок. а) Визначимо $a(2)$:

$a(2) = 30e^2 \approx 221.6$ тис. грн.

б) Сумарні внески за три дні визначимо за допомогою визначеного інтеграла:

$$\int_0^3 30e^t dt = 30e^t\Big|_0^3 = 30\left(e^3 - 1\right) \approx 572.4 \text{ тис. грн.}$$

Аналогічно розв'язуються задачі про епідеміологічний контроль, про потребу підприємства в матеріалах, про рівень затрат га ремонт приладів, про чисельність населення та ін.

3) Нехай виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд:

$$y = (4 + t)e^{2t}, t \in [0;3]$$

(y – об'єм випуску продукції (тис. шт.), t – час (роки)). Потрібно знайти об'єм Ω продукції, виготовленої за 3 роки.

Розв'язок. Об'єм Ω виготовленої продукції дорівнює визначеному інтегралу

$$\Omega = \int_0^3 (4 + t)e^{2t} dt .$$

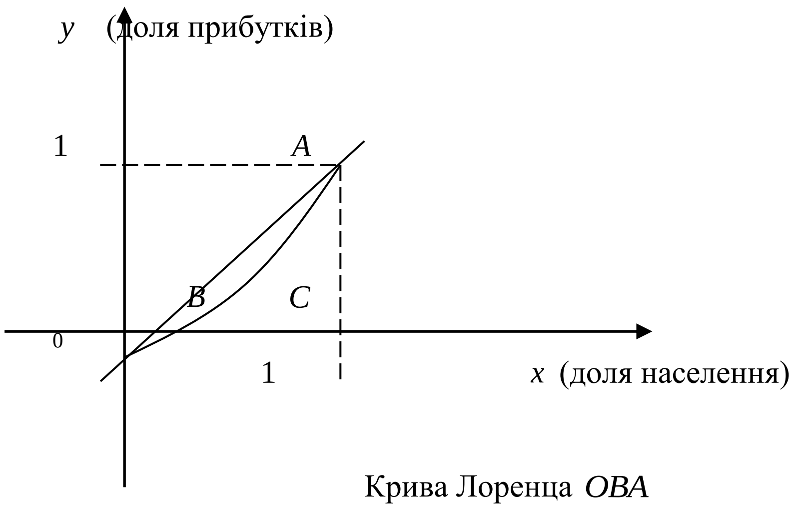
Інтегруючи частинами, знаходимо:

$$\Omega = \begin{vmatrix} u = u + t & du = dt \\ dv = e^{2t}dt & v = \dfrac{1}{2}e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(4 + t)e^{2t}\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 e^{2t}dt = \frac{7}{2}e^6 - 2 - \frac{1}{4}\left(e^6 - 1\right) = \frac{13}{4}e^6 - \frac{7}{4} \approx 11309$$ (тис. шт.)

Отже, за 3 роки буде виготовлено приблизно 1309 тис. шт. одиниць продукції.

4) За допомогою кривої Лоренцо *OBA* (рис. 11), що відображає залежність долі прибутків від долі населення, оцінюють нерівномірність в розподілі прибутків населення (якщо розподіл прибутків рівномірний, то крива Лоренца вироджується в пряму *OA*).

5)



Крива Лоренца OBA

Мірою цієї нерівномірності є коефіцієнт Джіні k: $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta JAB}}$, де S_{OAB} – площа OBA, а $S_{\Delta OAB}$ – площа трикутника OAC. При цьому чим більше k, тим нерівномірніший розподіл прибутків населення.

Нехай, наприклад, $y = x^4$. Тоді $S_{OAB} = \frac{1}{2} - \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{2} - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = 0.3$. Оскільки $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$, то $k = 0,6$. Розподіл прибутків населення істотно нерівномірний. Якщо ж $y = \frac{x^2 + 2x^3}{3}$, то аналогічно можна показати, що $k = \frac{4}{9} \approx 0,44$. В цьому випадку розподіл прибутків у меншій мірі нерівномірний.

Семінарське заняття 18

Тема. Числові ряди

Питання для усного опитування та дискусії

1. Означення ряду, його суми. Приклади.
2. Властивості числових рядів.
3. Необхідна ознака збіжності ряду.
4. Ознаки Даламбера, Коші. Інтегральна ознака збіжності ряду.
5. Знакопочергові та знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца. Абсолютна і умовна збіжність

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : ряд, частинна сума ряду, сума ряду, властивості числових рядів, необхідна ознака збіжності ряду, ознаки порівняння рядів з додатними членами, гранична ознака порівняння рядів з додатними членами, ознака Даламбера, ознака Коші, інтегральна ознака збіжності ряду, знакоперемінний ряд, знакозмінний ряд, ознака Лейбніца, абсолютна збіжність, умовна збіжність.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Числові ряди

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, ..., u_n, ...$. Вираз виду $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ (1) називається числовим рядом, а числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – членами ряду u_n – (загальний член ряду).

Властивості ряду істотно відрізняють від властивостей скінченої суми. Наприклад, для ряду

$1-1+1-1+...+1-1+...$

маємо:

$(1-1)+(1-1)+...+(1-1)+... = 0+0+...+0+... = 0;$

$1-(1-1)-(1-1)-...-(1-1)-... = 1-0-0-...-0 = 1.$

Цей факт довго сприймався як парадокс (17-19 століття). На базі теорії границь Коші в 1821 р. дав означення суми збіжного ряду, після чого стала зрозумілою різниця між збіжними та розбіжними рядами.

Сума скінченого числа n перших членів ряду називається n ною частинною сумою ряду:

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Таким чином, $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2$ і т. д.

Якщо при $n \to \infty$ існує границя послідовності частинних сум членів даного ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд називається збіжним, а число S – його сумою: $S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$

В противному випадку, коли $\lim_{n\to\infty} S_n$, не існує або нескінченна, ряд називається розбіжним.

Властивості збіжних рядів.

Відзначимо основні властивості рядів.

1) Якщо збігається ряд, одержаний з даного ряду відкиданням декількох його членів, то збігається і сам даний ряд. І навпаки: якщо збігається даний ряд, то збігається і ряд, одержаний з даного відкиданням декількох членів.

Дійсно, якщо S_n – сума n перших членів ряду (1), c_k – сума k відкинутих членів, δ_{n-k} – сума членів ряду, що входять в суму S_n і не входять в c_k , то $S_n = C_k + \delta_{n-k}$. Якщо існує $\lim_{n\to\infty} \delta_{n-k}$, то існує і $\lim_{n\to\infty} S_n$, і навпаки. Таким чином, на збіжність ряду не впливає відкидання скінченого числа його членів.

2) Якщо ряд (1) збігається і його сума дорівнює S , то ряд

$$cu_1 + cu_2 + ... + cu_n + ...,$$

де c – яке-небудь фіксоване число, також збігається і його сума дорівнює cS .

Розглянемо достатні ознаки збіжності ряду, які використовують лише вирази для його членів.

<u>Ознака Даламбера</u>. Нехай дано ряд $(1')$ з достатніми членами. Якщо при $n \to \infty$ існує границя відношення наступного члена до попереднього $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, що дорівнює l:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l;$$

то при $l < 1$, ряд збігається, (при $l > 1$ – як збіжним, так і розбіжним).

<u>Ознака Коші</u>. Якщо для ряду $(1')$ з додатними членами величина $\sqrt[n]{u_n}$ має скінченну границю l при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд збігається, при $l > 1$ – розбігається (при $l = 1$ ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).

Ряд, абсолютні величини членів якого утворюють збіжний ряд, називається <u>абсолютно збіжним</u>. Якщо ряд збігається, а ряд, утворений з абсолютних величин його членів, розбігається, то даний ряд називається <u>неабсолютно</u> або <u>умовно збіжним</u>.

Розглянутий вище ряд є умовно збіжним.

Виявляється, що коли ряд збігається абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним при будь-якій перестановці його членів. При цьому сума ряду не залежить від порядку його членів. Якщо ж ряд збігається умовно, то яким би не було число А, можна так переставити члени цього ряду, щоб його сума виявилась рівною А. Більше того, можна, так переставити члени умовно збіжного ряду, що ряд, одержаний після перестановки, виявиться розбіжним.

Семінарське заняття 19-20

Тема. Степеневі, тригонометричні, функціональні ряди

<u>*Питання для усного опитування та дискусії*</u>

1. Означення степеневого ряду. Теорема Абеля.
2. Розкладання функцій у степеневі ряди.
3. Застосування степеневих рядів до наближеного інтегрування.
4. Ряди по ортогональних функціях. Ряди Фур'є.
5. Функціональні ряди та їх збіжність.

<u>*Аудиторна письмова робота*</u>

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : степеневий ряд, радіус збіжності, теорема Абеля, ряд Тейлора, ряд Маклорена, наближене інтегрування за допомогою рядів, функціональний ряд, область збіжності, ряд Фур'є, ортогональна система функцій..

Степеневі ряди

Теорема Абеля.

<u>Степеневим рядом</u> називається функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

де $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ – сталі числа, які називається коефіцієнти ряду.

Степеневим рядом називають також функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ...$$

де a – деяке стале число.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (1) збігається при деякому значенні x_0, не рівному нулю, то він абсолютно збігається при будь-якому значенні x, для якого $|x| < |x_0|$; якщо ряд (1) розбігається при деякому значенні x_0, то він розбігається при будь-якому x, для якого $|x| < \left|x_0'\right|$;

Інтервал і радіус збіжності.

З теореми Абеля випливає, що коли x_0 є точкою збіжності ряду (1), то в інтервалі $(-|x_0|, |x_0|)$ цей ряд абсолютно збігається. Якщо ж при $x = x_0'$ ряд (1) розбігається, то він розбігається також за межами інтервалу $\left(-\left|x_0''\right|; \left|x_0''\right|\right)$. Отже, існує число x таке, що при $|x| < R$ ряд (1) абсолютно збігається, а при $|x| > R$ – розбігається. Таким чином, областю збіжності степеневого ряду є інтервал з центром в початку координат.

Інтервалом збіжності степеневого ярду називається такий інтервал $(-R; R)$, що для будь-якої точки x,що лежить всередині цього інтервалу, ряд збігається, причому абсолютно, а для точок x, що лежать поза ним, ряд розбігається (рис. 1). Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду. В деяких випадках R може дорівнювати 0 чи ∞.

Властивості степеневих рядів.

Відзначимо основні властивості степеневих рядів.

1) Сума степеневого ряду є функція, неперервна в інтервалі збіжності ряду. Відзначимо, що в тому кінці інтервалу, де степеневий ряд збігається, його сума також неперервна.
2) Степеневий ряд можна почленно інтегрувати в інтервалі збіжності.

Так, якщо

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^4 + ..., (-R < x < R)$$

то

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \int_0^x a_2 x^2 dx + ... + \int_0^x a_n x^n dx + ... = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 +$$

$$+ \frac{a_2}{3}x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + ... (-R < x < R)$$

3) Степеневий ряд можна почленно інтегрувати в інтервалі збіжності.

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} + ... (-R < x < R)$$

Продовжуючи послідовно диференціювання, одержимо:

$$S''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + ... + n(n-1)a_n x^{n-2} + ...,$$

$S'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + ... + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-2} + ...$, і так далі. Степеневий ряд в інтервалі його збіжності можна почленно диференціювати будь-яке число раз. При цьому інтервал збіжності кожного ряду, одержаного в результаті диференціювання, є той же інтервал $(-R; R)$.

Функціональний ряд та його збіжність.

Розглянемо ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots, \qquad (1)$$

членами якого є функції; задані на інтервалі $a \le x \le b$. Щоб відповісти на питання, в якому розумінні частинна сума $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ наближається до суми $S(x)$, розглянемо поняття про відхилення двох функцій.

Нехай дві функції, $f(x)$ і $\varphi(x)$, задані на одному і тому ж скінченому інтервалі $a \le x \le b$. Рівномірним відхиленням їх одна від другої називається величина $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-\varphi(x)|$ середнім інтегральним відхиленням функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ називається величина $\int\limits_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx.$ Деколи користуються середнім квадратичним відхиленням: $\sqrt{\int\limits_a^b (f(x)-\varphi(x))^2 dx}$. Зустрічаються і інші види відхилень.

Семінарське заняття 21

Тема. Загальні відомості про диференціальні рівняння. Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку

Питання для усного опитування та дискусії

1. Основні поняття і означення теорії диференціальних рівнянь.
2. Диференціальні рівняння з відокремленими та з відокремлюваними змінними.
3. Задачі на складання диференціальних рівнянь.
4. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь.
5. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
6. Рівняння, що зводяться до однорідних.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : диференціальне рівняння, порядок диференціального рівняння, загальний розв'язок диференціального рівняння, задача Коші, частинний розв'язок диференціального рівняння, загальний інтеграл диференціального рівняння, поле напрямків, метод Ейлера, наближене інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів, відокремлення змінних, однорідні диференціальні рівняння першого порядку, лінійні диференціальні рівняння першого порядку, рівняння Бернуллі.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію y(x) та її похідні. Найвищий порядок похідної від шуканої функції, що входить до диференціального рівняння, називається його порядком. Загальний вигляд диференціального рівняння n-го порядку такий:

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0$$

Диференціальне рівняння першого порядку типу (2), в якому при диференціалах dx та dy стоять відповідно функції, залежні тільки від x чи тільки від y , називаються диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

Диференціальне рівняння вигляду

$$f_1(x)\, g_1(y)\, dx=f_2(x)\, g_2(y)\, dy$$

називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

Рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

називається однорідним відносно x та y, якщо для будь якого λ справедлива тотожність

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y).$$

.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції та її похідної:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x),$$

де P(x), Q(x) – задані неперервні функції від x.

Якщо, зокрема, Q(x)=0, то рівняння

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

називається лінійним однорідним (або рівнянням без правої частини), а рівняння (1), в якому $Q(x)\neq 0$ – неоднорідним.

Семінарське заняття 22

Тема. Диференціальні рівняння вищих порядків

Питання для усного опитування та дискусії

1. Диференціальне рівняння вищого порядку, розв'язане відносно старшої похідної, права частина якого – задана функція від *x.*
2. Диференціальне рівняння вищого порядку, яке допускає зниження порядку шляхом введення нової змінної *p(x).*
3. Диференціальне рівняння вищого порядку, яке допускає зниження порядку шляхом введення нової змінної *p(y).*

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : загальний розв'язок (інтеграл) диференціального рівняння вищого порядку, частинний розв'язок (інтеграл) диференціального рівняння вищого порядку, метод послідовного інтегрування диференціального рівняння вищого порядку, зниження порядку диференціального рівняння шляхом введення нової змінної.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах.

Нехай задано диференціальне рівняння n – го порядку, розв'язане відносно старшої похідної:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \quad (n > 1).$$

<u>Загальний розв'язок</u> рівняння n – го порядку має вигляд

$$y = y(x, c_1, c_2, ..., c_n),$$

де $c_1, c_2, ..., c_n$ - довільні сталі. Якщо загальний розв'язок отримується в неявній формі

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0,$$

то його називають **<u>загальним інтегралом</u>**.

Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$.

Щоб знайти загальний інтеграл цього рівняння, необхідно n разів проінтегрувати його ліву й праву частини. Справді, оскільки $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, після першого інтегрування дістаємо:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1,$$

де x_0 –будь-яке фіксоване значення x, а c_1 – довільна стала інтегрування. Після другого інтегрування маємо:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} (\int_{x_0}^{x} f(x)dx)dx + c_1(x - x_0) + c_2.$$

Продовжуючи аналогічно, отримаємо загальний розв'язок

Рівняння виду $f(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$

Це рівняння не містить явно y. За допомогою підстановки $y' = p(x)$, де $p(x)$ - нова шукана функція, можна понизити його порядок на одиницю. Відносно $p(x)$ отримуємо рівняння:

$$f(x, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0.$$

Аналогічний прийом дозволяє понизити порядок рівняння на k одиниць, якщо воно не містить явно ні функції y, ні її похідних до $(k-1)$ – го порядку включно:

$$f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

У цьому разі слід виконати підстановку $y^{(k)} = p(x)$. Зокрема, диференціальне рівняння виду

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$$

інтегрується за допомогою підстановки $y^{(n-1)} = p(x)$.

Рівняння виду $f(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$

Це рівняння не містить явно незалежну змінну x. Щоб понизити його порядок на одиницю, виконаємо підстановку: $y' = p(y)$, де $p(y)$ –нова шукана функція. Зауважимо, що при цьому $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp(y)}{dy} p(y), \frac{d^3y}{dx^3} = (p'(y)p)'_x = (p'(y)p)'_y \frac{dy}{dx} = (\frac{d^2p}{dy^2} p + (\frac{dp}{dy})^2)p$ тощо. Порядок диференціального рівняння відносно $p(y)$ дорівнює $(n-1)$.

Якщо вдається знайти його загальний розв'язок $p = p(y, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$, то $y(x)$ визначається у квадратурах:

$$\int \frac{dy}{p(y, c_1, \ldots, c_{n-1})} = x + c_n.$$

Тут $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - довільні сталі.

Семінарське заняття 23

Тема. Основні поняття математичного програмування. Тема. Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП

Питання для усного опитування та дискусії

1. Задача математичного програмування.
2. Цільова функція.
3. Ресурсні обмеження.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : математичне програмування, модель, цільова функція, ресурсні обмеження, ключовий рядок, ключовий стовпчик, генеральний елемент.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, предметом якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних за-даних умов.

У математичному програмуванні виділяють два напрямки — детерміновані задачі і стохастичні. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи па-раметрів. Уся початкова інфор¬мація повністю визначена. У стохастичних задачах використо¬вується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випад-кових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням а і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програму-вання, які в свою чергу поділяються на інші класи. Схематично класифікацію задач зображено на рисунку (поділ наведений для детермінованих задач, але він такий же і для стохастичних).
Багатокомпонентність і велика розмірність систем, зокрема соціально-економічних, може значно ускладнити процес відображення мети та обмежень в аналітичному вигляді. Тому виникає необхідність у проведенні процедури зменшення реальної розмірності задачі до таких меж, які б із достатнім ступенем точності адекватно відобразили реальну дійсність. Незважаючи на велике число змінних і обмежень, які на перший погляд слід враховувати в процесі аналізу реальних ситуацій, лише невелика їх частина виявляється суттєвою для опису поведінки досліджуваних систем. Тому при виконанні процедури спрощення опису реальних систем, на основі якої буде побудована модель, насамперед необхідно ідентифікувати домінуючі змінні, параметри та обмеження. Математична модель — це абстракція реальної дійсності (світу), в якій від-ношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подають-ся у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями

формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

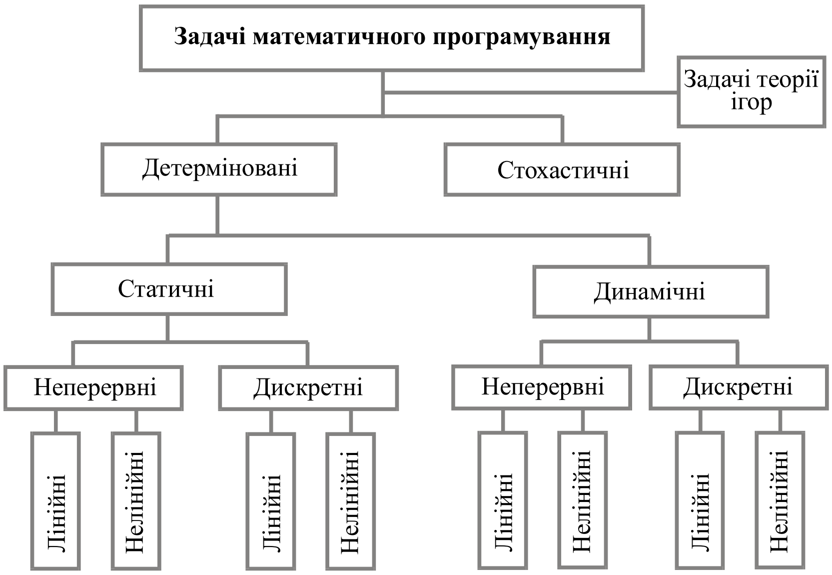


Рисунок Класифікація задач математичного програмування

Вже сама постановка питання щодо математичного моделювання будь-якого об'єкта породжує чіткий план дій, який умовно можна поділити на три етапи: модель — алгоритм — програма.

Узагальнена схема процесу
економіко-математичного моделювання

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.
Нехай F – вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$F = f\,(x1, x2, ..., xn;\ \ y1, y2, ..., ym;\ \ c1, c2, ..., cl).$$

Функцію F називають цільовою функцією, або функцією мети. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача економіко-математичного моделювання формулюється так: знайти такі значення керованих змінних xj, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j}(\min) F^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ c_1, c_2, \ldots, c_l).$$

Семінарське заняття 24

Тема. Лінійне програмування.

Геометричний і симплексний методи розв’язування ЗЛП

<u>Питання для усного опитування та дискусії</u>

1. Лінійне програмування. Економічні приклади ЗЛП.
2. Геометричний спосіб розв’язування ЗЛП.
3. Симплекс-метод розв’язування ЗЛП.

<u>Аудиторна письмова робота</u>

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : лінійне програмування, цільова функція, обмеження, геометричний спосіб розв’язування ЗЛП, симплекс-метод, ключовий рядок, ключовий стовпчик.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ – так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

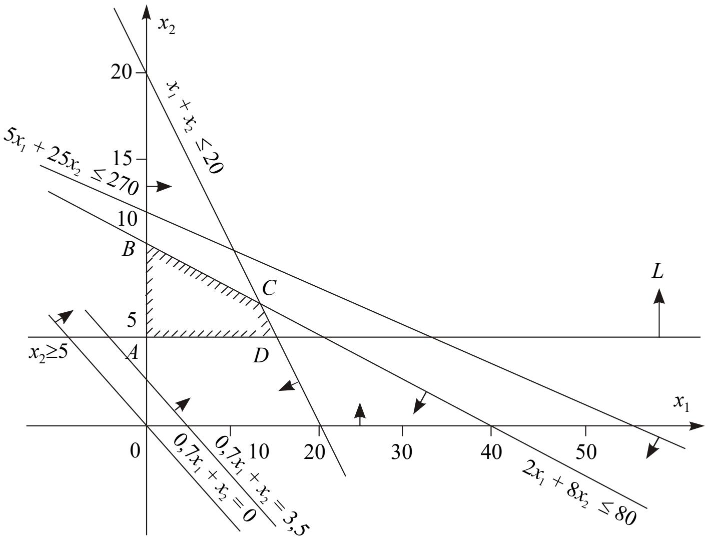
за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Отже, потрібно знайти значення змінних x1, x2, …, xn, які задовольняють умови і і цільова функція набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рисунку:



Область допустимих розв'язків задачі

Область допустимих розв'язків задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \leq 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \leq 20$. З цією метою в нерівність $x_1+x_2 \leq 20$ підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1=0$ і $x_2=0$. Переконуємося, що ця точка належить півплощині $x_1+x_2 \leq 20$. Цей факт на рис.3.2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (3.10)—(3.13). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (на рис.3.2 – чотирикутник *ABCD*). Цільова функція $Z = 0{,}7x_1 + x_2$ являє собою сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z. Зокрема, якщо $Z=0$, то маємо $0{,}7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $Z=3{,}5$, то маємо пряму $0{,}7x_1 + x_2 = 3{,}5$.

Семінарське заняття 25

Тема. Оптимізаційні економіко-математичні задачі. Задача планування виробництва

Питання для усного опитування та дискусії

1. Модель оптимізації виробничої програми підприємства
2. Задача про дієту
3. Задача про призначення.
4. Задача оптимального розподілу капіталовкладень
5. Модель оптимальної структури інвестиційного портфеля
6. Модель оптимізації процесу управління ліквідністю банку

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : оптимізація, компромісний план, часовий фактор, оптимальна структура, оптимізаційний процес, управління, ліквідність банку, інвестиційний портфель

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

***Задача визначення оптимального плану виробництва*:** для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях(задана асортиментність).

Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон – кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

***Задача оптимального розподілу виробничих потужностей*:** розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств.

Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв’язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади.

Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої – вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Семінарське заняття 26-27

Тема. Транспортна задача. Метод потенціалів

Питання для усного опитування та дискусії

1. Постановка транспортної задачі.
2. Побудова початкового опорного плану.
3. Розрахунок потенціалів.
4. Перевірка плану на оптимальність.
5. Цикл перерахунку транспортної задачі.
6. Задачі, що розв’язуються за транспортним алгоритмом.

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські/Лабораторні завдання.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : транспортна задача, метод північно-західного кута, опорний план, метод потенціалів, ріняння балансу, оптимальність, цикл перерахунку, транспортний алгоритм.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Загальна постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного товару із M — пунктів відправлення ($a_1, a_2, \ldots, a_m$) в N — пунктів призначення ($b_1, b_2, \ldots, b_n$). При цьому в якості критерію оптимальності беруть мінімальну вартість на перевезення всього товару обо мінімальний час його доставки.

Розглянемо транспортну задачу в якості критерію оптимальності якої взято мінімальну вартість перевезення. Позначимо через C_{ij} — тарифи на перевезення одиниці товару з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Через a_i — запаси товару в i-му пункиі відправлення; b_j — потреби в товарі у j-му пункті призначення. Через X_{ij} — кількисті товару, який потрібно перевезти з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} (1)$$

при умовах:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 (4)$$

Оскільки змінні X_{ij} — задовільняють систему лінійних рівнянь і умову, то ми можемо забезпечити доставку необхідної кількості товару в кожний із пунктів призначення.
Означення 1: будь-який невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь, який записується у вигляді матриці $X = (x_{ij}), i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$ — називається планом транспортної задачі.
Означення 2: план $X^* = (x_{ij}^*)(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$, при якому функція приймає своє мінімальне значення називається оптимальним планом транспортної задачі.
Початкові дані транспортної задачі записуються у вигляді таблиці:

Пункти відправлення	*Пункти призначення*					*Запаси*
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	C_{11}	...	C_{1j}	...	C_{1n}	a_1
	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	
...	...	...	...	...	...	...
A_i	C_{i1}	...	C_{ij}	...	C_{in}	a_i
	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	
...	...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1}	...	C_{mj}	...	C_{mn}	a_m
	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Оскільки, транспортна задача представляє собою частковий випадок задачі лінійного програмування тому розв’язання транспортної задачі з використанням надбудови «Поиск решения» в цілому практично нічим не відрізняється від розв’язання задачі лінійного програмування, окрім того, що таблична модель транспортної задачі має свою форму. Всі інші рекомендації щодо застосування інструменту «Поиск решения» для розв’язання транспортної задачі залишаються такими ж, як і для задачі лінійного програмування. Це стосується можливостей післяоптимізаційного аналізу, тобто у випадку успішного розв’язання можна отримати всі три звіти. Відповідно, якщо необхідно розв’язати транспортну задачу в MS Excel 2017 і нижче, можна використати макет задачі (рис. 1, 2 та 3) з методичних рекомендацій до лабораторної роботи №2 та скористатися методичними рекомендаціями щодо надбудови «Поиск решения» з лабораторної роботи №1.

	A	B	C	D	E	F
1		Транспортна задача				
2						
3	Матриця вартості					
4			Споживачі			
5	Постачальники	B1	B2	B3		
6	A1					
7	A2					
8	A3		Матриця вартості			
9	A4					
10	A5					
11						
12	Матриця рішень					
13			Споживачі			
14	Постачальники	B1	B2	B3	Сума запасів	Запаси
15	A1					
16	A2				Формули	
17	A3		Матриця рішення		обмежень за	
18	A4				запасами	
19	A5					
20	Сума споживання	Формули обмежень за споживанням				
21	Споживання					
22						
23			Цільова функція			

Семінарське заняття 28

Тема Побудова та дослідження економетричної моделі

Питання для усного опитування та дискусії

1. Модель парної лінійної регресії
2. Діаграма розсіювання регресійної функції
3. Метод найменших квадратів

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття.
Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські-Лабораторні завдання

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : коефіцієнт кореляції, коефіцієнти детермінації детермінації, регресія, діаграма, розсіювання, розкид, МНК

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Регресійний аналіз дозволяє визначити статистичні оцінки для параметрів функції регресії. Але, оскільки ми маємо в розпорядженні лише статистичні оцінки, одержані за результатами обробки однієї реалізованої вибірки, то неможливо зробити висновки відносно того, наскільки одержане емпіричне рівняння регресії буде відповідати рівнянню для всієї генеральної сукупності, тобто наскільки близькі будуть статистичні оцінки параметрів β_0^*, β_1^* до своїх теоретичних значень β_0, β_1, а, отже, і наскільки близькими будуть модельовані значення ознаки Y ($y_i = \beta_0^* + \beta_1^* x_i$) до значень умовних математичних сподівань $M\left(Y/_{X = x_i}\right)$, а також наскільки при цьому ці значення будуть надійними.

Специфікація моделі

В даному прикладі розглядається зв’язок між двома показниками – обсягом реалізації продукції та кредиторською заборгованістю підприємства, отже, маємо парну регресію.

Позначимо залежну величину – обсяг реалізації продукції – через y, а незалежну величину – кредиторську заборгованість – через x.

У випадку парної регресії зв’язок між величинами може бути представлений у графічній формі, що дає можливість наочно впевнитись у виборі кращої форми регресійного рівняння (специфікації моделі).

Представимо графічно залежність між наведеними показниками:

Очевидно, що в даному випадку зв’язок між наведеними показниками близь-кий до лінійного, тому емпіричне рівняння матиме вигляд:

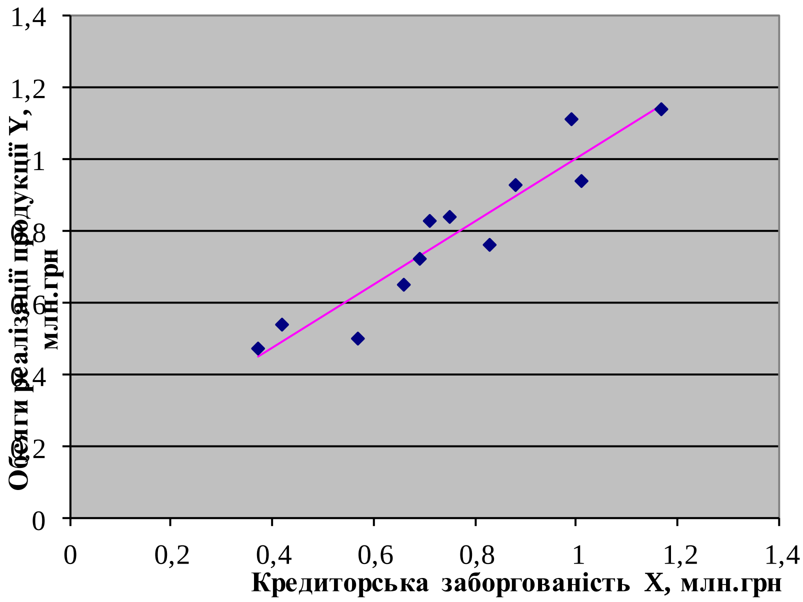
$$y_i = \beta_0^* + \beta_1^* x_i + e_i$$

2) Визначення параметрів вибраного рівняння

Розрахуємо значення коефіцієнтів:

$$\beta_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}; \ .$$

Для потрібних обчислень необхідно поетапно розрахувати наступні величини: $\bar{x}, \bar{y}$, для кожного спостереження $i = \overline{1,12}$ $(x_i - \bar{x}),\ (y_i - \bar{y})$, $(x_i - \bar{x})^2$, а також $\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}), \sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2$.



Перевірка загальної якості рівняння регресії. Нагадаємо, що загальну якість рівняння регресії здійснюють через розрахунок коефіцієнта детермінації, що обчислюється за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} \quad \text{або} \quad R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i^* - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}.$$

Метод найменших квадратів

Познайомимося з *<u>методом найменших квадратів</u>*.

Припустимо, що в результаті експерименту одержані точки (x_i, y_i) ($i = \overline{1, n}$), які групуються навколо прямої $y = a_0 + a_1 x$ (a_0, a_1 – невідомі сталі). При підстановці в цю рівність $x = x_i$ одержуємо y_i , яке звісно може не співпадати з y_i . Різниця $y_i - y_0$ називається *<u>нев'язкою</u>*.

Підберемо параметри прямої a_0, a_1 так, щоб сума квадратів нев'язок була мінімальною (суму нев'язок не мінімізуємо, бо вона може вийти малою при великих нев'язках різного знаку). Маємо:

$$S(a_0, a_1) \equiv \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right)^2$$ – це функція двох змінних a_0 та a_1.

Використовуємо необхідні умови існування екстремуму. Знаходимо частинні похідні S'_{a_0} та S'_{a_1} і прирівнюємо їх до нуля. Маємо:

$$S'_{a_0} = 2\sum \left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right) = 0, \; S'_{a_1} = 2\sum \left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right) x_i = 0.$$

В результаті отримуємо нормальну систему рівнянь:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера. Маємо:

$$\Delta = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \quad (\Delta \neq 0);$$

$$\Delta_{a_0} = \sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i; \; \Delta_{a_1} = n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i.$$

Отже,

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}; \; a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}.$$

<u>Наприклад</u>. Нехай x – стаж роботи за спеціальністю робітника деякого цеху, а y – процент перевиконання планового завдання (Таблиця 1).

Таблиця

x (років)	1,5	1,7	1,8	1,9	2,3	2,4	2,5	2,6	2,9
y (%)	1,4	1,8	1,7	1,9	2,3	2,3	2,5	2,4	2,8

Методом найменших квадратів знайдемо емпіричну залежність $y = a_0 + a_1 x$.

<u>Розв'язок</u>.

Система рівнянь для визначення a_0 і a_1 в даному випадку набуває виду

$$\begin{cases} 9a_0 + 19{,}6a_1 = 19{,}1 \\ 19{,}6a_0 + 44{,}36a_1 = 43{,}25 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо: $a_0 = -0{,}14$; $a_1 = 1{,}37$. Отже, шукана емпірична формула має вигляд

Семінарське заняття 29

Тема Розв'язок задач балансовим методом

Питання для усного опитування та дискусії

1. Модель багатогалузевої економіки Леонтьєва
2. Модель міжнародної торгівлі
3. Простір товарів. Вектор цін
4. Модель рівноваги ринку
5. Модель рівноваги доходів і збитків

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські завдання

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : математичне моделювання, дослідження операцій, портфель активів, інвестиції, оптимальний розподіл ресурсів, динамічне програмування, стохастичне моделювання, ігрова модель, модель Уілсона.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Один з найвидатніших вчених-економістів Василь Васильович Леонтьєв (1906-1999) у 20-30 р. ХХ ст.. першим почав вивчати структуру багатогалузевої економіки. Він запропонував модель міжгалузевого балансу (МГБ). Познайомимося з моделлю Леонтьєва.

У макроекономіці вивчається така задача щодо n галузей економіки.

Нехай x_i –валовий об'єм кінцевого продукту i-тої галузі ($i=1,2\ldots n$); y_i - об'єм кінцевого продукту i-тої галузі, виготовленого для невиробничого використання ; x_{ij} – j- ою галуззю в процесі виробництва ($j=1,2\ldots n$).

Припустимо, що всі величини мають вартісне вираження.

Мають місце співвідношення балансу:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Леонтьєв В.В. показав, що останнє співвідношення можна подати у лінійні формі:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i .$$

Введемо векторно – матричні позначення $X=colon(x_1, x_2, \ldots x_n)$ $Y=colon(y_1, y_2, \ldots y_n)$, $A=[a_{ij}]$ $(I,j=1,2,\ldots,n)$.

Отримуємо рівняння лінійного міжгалузевого балансу, або модель Леонтьєва:

$$X=AX+Y$$

Щоб використати цю модель для потреб планування, задаютькінцеви продукт Y і розв'язують останнє рівняння(матриця A відома) відносно X .

Оскільки виконується співвідношення $(E-A)X=Y$, то (у разі невиродженості матриці E-A) маємо:

$$X=(E-A)^{-1}Y$$

Матриця $(E\text{-}A)^{-1}$ називається матрицею повних витрат.

Семінарське заняття 30

Тема Імітаційне моделювання

Питання для усного опитування та дискусії

1. Основні поняття та особливості імітаційного моделювання
2. Моделюючий алгоритм і формалізована система процесу
3. Принцип побудови імітаційних моделюючих алгоритмів
4. Метод Монте-Карло та перевірка статистичних гіпотез

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські завдання

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : імітація, модель, алгоритм, метод.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Розвиток засобів обчислювальної техніки став основною запорукою появи нового наукового напрямку в дослідженні складних процесів функціонування та розвитку економічних систем – імітаційного моделювання.

При керуванні виробничо-економічними системами (ВЕС) дуже часто приходиться мати справу з випадковими факторами: ринковим попитом, відмовою обладнання, потребою у фінансових ресурсах і т.д. Для оцінки наслідків роботи ВЕС за таких умов часом проводять штучний експеримент, під час якого замість проведення складних випробувань із реальними об’єктами робляться спеціальні досліди на математичних моделях. Такі досліди називаються імітаційним моделюванням, а їх основу складає імітаційна модель. Імітаційні моделі є особливим класом математичних моделей і відрізняються від аналітичних тим, що в їх реалізації головну роль беруть на себе ПК. Потужність засобів обчислювальної техніки, сучасне програмне забезпечення дає можливість ефективно організувати діалоговий режим роботи в рамках імітаційних систем. Ідея методу імітаційного моделювання полягає в тому, що замість аналітичного опису взаємозв’язків між вхідними і вихідними станами та показниками будується алгоритм, який відображає послідовність розвитку процесів у середині об’єкта дослідження, а потім імітується поведінка цього об’єкта на ПК.

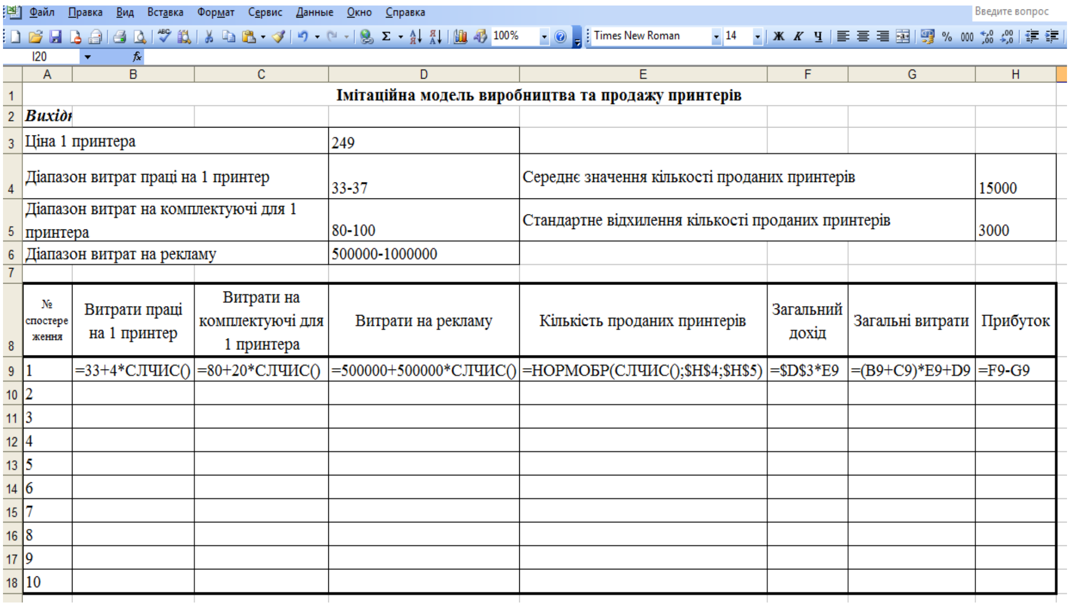
Імітаційне моделювання являє собою серію чисельних розрахунків, покликаних установити емпіричним шляхом ступінь впливу деяких вихідних даних або факторів на досліджувані результуючі (вихідні) показники.

У загальному випадку проведення імітаційного експерименту можна розбити на наступні етапи:

1. Установити взаємозв'язок між вхідними і вихідними показниками у виді математичного рівняння.
2. Задати закони розподілу імовірностей для ключових параметрів моделі.
3. Провести комп'ютерну імітацію значень ключових параметрів моделі.

4. Розрахувати основні характеристики розподілів вхідних і вихідних показників.
5. Провести аналіз отриманих результатів і прийняти рішення.

Для реалізації імітаційного експерименту необхідний комп'ютер, оснащений спеціальним програмним забезпеченням. Зручними доступним інструментом для проведення імітації при рішенні задач у фінансовій сфері є табличний процесор Microsoft Excel.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Імітаційна модель виробництва та продажу принтерів**							
2	***Вихідн***							
3	Ціна 1 принтера			249				
4	Діапазон витрат праці на 1 принтер			33-37	Середнє значення кількості проданих принтерів			15000
5	Діапазон витрат на комплектуючі для 1 принтера			80-100	Стандартне відхилення кількості проданих принтерів			3000
6	Діапазон витрат на рекламу			500000-1000000				
7								
8	№ спостереження	Витрати праці на 1 принтер	Витрати на комплектуючі для 1 принтера	Витрати на рекламу	Кількість проданих принтерів	Загальний дохід	Загальні витрати	Прибуток
9	1	=33+4*СЛЧИС()	=80+20*СЛЧИС()	=500000+500000*СЛЧИС()	=НОРМОБР(СЛЧИС();H4;H5)	=D3*E9	=(B9+C9)*E9+D9	=F9-G9
10	2							
11	3							
12	4							
13	5							
14	6							
15	7							
16	8							
17	9							
18	10							

Аналіз чутливості фінансових показників в середовищі пакета Microsoft Excel

Аналіз чутливості показників широко використовується в практиці фінансового менеджменту. У загальному випадку він зводиться до дослідження залежності деякого результуючого показника від варіації значень показників, що використовуються у його визначенні. Іншими словами, цей метод дозволяє одержати відповіді на питання виду: що буде з результуючою величиною, якщо зміниться значення деякої вхідної величини?

Проведення подібного аналізу припускає виконання наступних етапів.

1. Задається взаємозв'язок між вхідними і результуючими показниками у виді математичного рівняння або нерівності.

2. Визначаються найбільш ймовірні значення для вхідних показників і можливі діапазони їхніх змін.

3. Шляхом зміни значень вхідних показників досліджується їхній вплив на кінцевий результат.

Звичайна процедура аналізу чутливості припускає зміну одного вхідного показника, у той час як значення інших вважаються постійними величинами.

Табличний процесор Microsoft Excel надає користувачу широкі можливості по моделюванню подібних розрахунків. Для цього в ньому реалізовано спеціальний засіб **Таблица подстановки**.

Застосування таблиць підстановки дозволяє швидко розрахувати, переглянути і порівняти вплив на результат будь-якої кількості варіацій одного показника.

Семінарське заняття 31

Тема Прийняття рішень в умовах повної інформації (визначеності)

Питання для усного опитування та дискусії

1. Множина Еджворта–Парето
2. Метод варіювання зваженої суми критеріїв
3. Метод аналізу ієрархій
4. Методи аналізу колективних рішень

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські завдання

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : рішення, управління, прийняття, множина, визначеність, невизначеність, ризик, колектив, ієрархія.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Людям доводиться приймати рішення майже всюди і завжди. Цей процес супроводжує людство з часів початку розвитку розумного усвідомлення пріоритетів у виборі дій. Однак його формалізація і усвідомлення того, що схема процесу прийняття рішення не залежить від тієї предметної області, в якій рішення приймається, відбулись (за історичними мірками) нещодавно – незабаром після Другої світової війни. Виявилося, що встановлені закони прийняття рішень діють незалежно від наукової галузі. Розробка методів прийняття рішень вимагає розгляду математичних, психологічних і комп’ютерних проблем. У зв’язку з цим у розвитку теорії прийняття рішень як науковому напрямі беруть участь фахівці з математики, комп’ютерних наук, інформатики та психології.

У теорії прийняття рішень використовуються «розумні» процедури вибору найкращої з декількох можливих альтернатив. Наскільки правильним буде вибір, насамперед залежить від якості даних, що використовуються при опису ситуації, в якій приймається рішення. Залежно від цього процес прийняття рішень може належати до одного з трьох можливих класів умов:

1. Прийняття рішень в умовах визначеності, коли дані відомі точно.
2. Прийняття рішень в умовах ризику, коли дані можна описати за допомогою імовірнісних розподілів.
3. Прийняття рішень в умовах невизначеності, коли даним не можна про- писати відносні ваги (вагові коефіцієнти), які представляли б ступінь їх значимості у процесі прийняття рішень.

Ідея формування множини Еджворта–Парето у «відсіюванні» альтернатив, у яких оцінки за всіма критеріями гірші, ніж у інших. Реалізація цієї ідеї потребує введення визначення відношення домінування на множині альтернатив. **Домінуюча** альтернатива. Альтернативу А будемо називати **домінуючою** відносно альтернативи В, якщо значення оцінки альтернативи А за всіма критеріями не гірше, ніж значення оцінки альтернативи В, а хоча б за одним критерієм значення оцінки альтернативи А – краще. За таких умов альтернатива В називається **домінована** (самостійно сформулюйте визначення домінованої альтернативи). **Непорівнювані** альтернативи. Альтернативи А і В будемо називати непорівнюваними відносно одна одної, якщо значення оцінки альтернативи А за одним із критеріїв краще за значення цього ж критерію альтернативи В, але водночас за одним з інших критеріїв значення альтернативи А гірше за значення цього критерію альтернативи В. **Абсолютно домінуюча** альтернатива – це альтернатива, яка є домінуючою відносно кожної з наданих альтернатив.

Метод варіювання зваженої суми критеріїв (або метод лінійної згортки) дає змогу труктурувати множину альтернатив з використанням їх критеріїв. Іноді цей метод називають мультиплікативною згорткою (мультиплікативною лінійною згорткою).

Семінарське заняття 32-33

Тема Системи та методи прийняття рішень в умовах ризику та конфлікту

Питання для усного опитування та дискусії

1. Критерій сподіваного значення
2. Критерій "сподіване значення - дисперсія"
3. Критерій граничного рівня

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські завдання

.

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : рішення, управління, прийняття, множина, визначеність, невизначеність, ризик, колектив, ієрархія., задачі з умовами невизначеності та конфліктності, критерій Вальда, критерій Севіджа, критерій Гурвіца. оптимізаційні задачі, багатокритеріальні задачі, розв'язок багатокритеріальної задачі, множина Парето, класи задач прийняття багатоцільових рішень.

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Як ризик розглядаємо такі ситуації, при яких настання невідомих подій дуже ймовірне і може бути знайденим. У той же час ситуація, при якій імовірність настання невідомих подій завчасно не може бути нами встановленою, чи не може бути встановленою традиційними засобами, називається невизначеністю.

Поняття господарського ризику та умови його виникнення тісно пов'язані з поняттям невизначеності й ефективності. Ось чому процесу знаходження найбільш ефективного варіанта розвитку деякої виробничої системи властивий господарський ризик. Отже, раціональні методи прийняття рішень в умовах ризику пов'язані з множиною допустимих (збалансованих) планів і їх ефективностями, які є складовими оптимального планування. Тобто раціональні рішення в умовах ризику є оптимальними.

За наявності ризику, а отже, й невизначеності, під збалансованим планом уже недостатньо розуміти план, узгоджений із внутрішніми та зовнішніми параметрами лише за усередненими очікуваними об'ємними показниками, оскільки їх дійсні значення можуть істотно відрізнятися від очікуваних. Тут необхідно враховувати варіацію невизначених параметрів і частоти, з якими вони потрапляють у певний інтервал.

Одним із основних способів підвищення ступеня збалансованості плану в умовах невизначеності є формування необхідних резервів. Для прийняття рішень в умовах невизначеності вхідна інформація задається у вигляді матриці, стрічки якої відповідають можливим альтернативам, а стовпці – станам систем.

Вигляд функції корисності може дати інформацію про ставлення до ризику особи, яка приймає рішення.

Особу, яка приймає рішення, називають несхильною до ризику, якщо для неї більш пріоритетною є можливість одержати гарантовано сподіваний виграш у лотереї, аніж брати в ній участь.

А тому, умова несхильності до ризику записується як

$$U(M(X)) > M(U(X)).$$

Особу, яка приймає рішення, називають схильною до ризику, якщо для неї більш пріоритетною є участь у лотереї, ніж можливість одержати гарантовано сподіваний виграш.

Відповідно, умова схильності до ризику записується як

$$U(M(X)) < M(U(X)).$$

Проміжне значення між схильністю та несхильністю до ризику відіграє нейтральність (байдужість) до ризику. Вона визначається байдужістю особи у виборі між отриманням гарантованої суми, яка збігається з середньоочікуваним виграшем, та участю у лотереї.

Очевидно, що умова байдужості до ризику:

$$U(M(X)) = M(U(X));$$

Зазначимо, що в цьому випадку величина сподіваного виграшу збігається з детермінованим еквівалентом лотереї, а тому премія за ризик (X) = 0.

На основі вищевикладеного можна стверджувати, що особа яка приймає рішення, у тому і лише у тому випадку є:

а) не схильна до ризику, коли її функція корисності опукла вгору.

б) схильна до ризику, коли її функція корисності опукла вниз.

в) нейтральна до ризику, коли її функція корисності є лінійною.

Семінарське заняття 34

Тема. Системи та методи прийняття рішень в умовах невизначеності.

Питання для усного опитування та дискусії

1. Критерій Лапласа
2. Критерій Вальда
3. Критерій Севіджа
4. Критерій Гурвіца
5. Критерій Байєса (максимум середнього виграшу)
6. Критерій мінімуму середнього ризику
7. Критерій Ходжеса-Лемана

Аудиторна письмова робота

Виконання студентами тестових та індивідуальних завдань з питань теми заняття. Семінарські/лабораторні та індивідуальні завдання містяться в Google Classroom в папці Семінарські завдання

Методичні вказівки

Ключовими термінами, на розумінні яких базується засвоєння навчального матеріалу теми, є : Критерій Лапласа, Критерій Вальда , Критерій Севіджа, Критерій Гурвіца, Критерій Байєса (максимум середнього виграшу), Критерій мінімуму середнього ризику, Критерій Ходжеса-Лемана

З метою глибокого засвоєння навчального матеріалу при самостійному вивченні теми студенту варто особливу увагу зосередити на таких аспектах:

Завдання прийняття рішень в умовах невизначеності виникає при необхідності діяти в ситуації, яка відома не повністю. Її формулюють переважно як задачу пошуку окремого найкращого (в певному розумінні) рішення на наперед заданій множині допустимих рішень. Основна проблема полягає в тому, що наслідки, пов'язані з прийняттям будь-якого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності цих наслідків прийнято вимірювати умовними одиницями – втратами, яких за припущенням може зазнати активна особа (той, хто приймає рішення). Основною вхідною інформацією, необхідною для розв'язання задач такого типу, є функція втрат, яка являє собою залежність втрат від двох аргументів: рішення та ситуації. Основний крок при розв'язуванні задачі полягає в перетворенні функції втрат на функцію ризику, яка відображає залежність ступеня ризику, на який іде активна особа. Спосіб такого перетворення неоднозначний і залежить від критерію ризику, який вибрала активна особа.

Основними причинами невизначеності є:

• невизначений характер науково-технічного процесу;
• динамічні зміни внутрішніх і зовнішніх умов розвитку економіки;
• неминучі похибки при аналізі складних систем;
• імовірнісний характер основних економічних параметрів;
• розвиток і розширення творчої активності працездатного населення;
• необхідність проектування потужних інформаційних потоків на комп'ютерній базі.

Критерій Байєса також називають критерієм середньозваженого (сподіваного) прибутку, затрат, ризику тощо.

Якщо ситуації або події характерне повне незнання закону розподілу ймовірностей станів ЕС. А тому вибір розподілу повинен базуватись на певних допущеннях (гіпотезах).

У якості одного з таких допущень можна використати *принцип Бернуллі Лапласа* (*принцип недостатніх підстав*), згідно з яким можливі стани економічного середовища розглядаються як рівноймовірні випадкові події, якщо відсутня інформація про умови, за яких кожен стан може відбутися.

Критерій Бернуллі-Лапласа ґрунтується на застосуванні критерію Байєса та принципі недостатніх підстав для одержання оцінок апріорних ймовірностей. Згідно з цим критерієм у випадку, коли $F = F^+$, оптимальним є рішення

$$x_{k_0} : B^+(x_{k_0}; \hat{P}) = \max_{x_k \in X} B^+(x_k; \hat{P}),$$

$$B^+(x_k; \hat{P}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{kj}^+; \quad \hat{P} = \left\{\frac{1}{n}; \cdots; \frac{1}{n}\right\}.$$

Аналогічно будується критерій у випадку, коли функціонал оцінювання має негативний інгредієнт $\left(F = F^-\right)$.

Критерій Вальда

Коли $F = F^+$, то оптимальне (безризикове) рішення x_{k_0} вибирається згідно з принципом *maxmin* (*максиміну*). Схема процесу прийняття оптимального рішення така: кожному рішенню $x_K \in \mathrm{X}$ присвоюють, як показник, його гарантований рівень, який відповідає найменшій (за станами ЕС) компоненті відповідного вектора оцінювання $F_k^+ = \{ f_{k1}^+; \ldots; f_{kn}^+ \}$.Тобто згідно з критерієм Вальда оптимальним є рішення

$$x_{k_0} : \ \tilde{f}_{k_0}^+ = \max_{x_k \in X} \tilde{f}_k^+ = \max_{x_k \in X} \ \min_{\theta_j \in \Theta} f_{kj}^+,$$

Де $\tilde{f}_{к}^{\,+} = \min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{kj}^{\,+}$.

У випадку, коли $F = F^-$, оптимальне рішення знаходиться згідно з *принципом minmax* (*мінімаксу*), а саме:

$$x_{k_0}:\ \tilde{f}_{k_0}^- = \min_{x_k \in X} \tilde{f}_k^- = \min_{x_k \in X} \max_{\theta_j \in \Theta} f_{kj}^-,$$

Де $\tilde{f}_к^- = \max_{\theta_j \in \Theta} f_{kj}^-$.

Слід зазначити, що критерій Вальда має ту перевагу, що він надзвичайно консервативний, тобто безризиковий у такій ситуації, де недоцільно ризикувати.

Критерій Гурвіца

Критерії Вальда та Севіджа песимістичні в тому сенсі, що з кожним рішенням вони поєднують стан середовища, яке приводить до гарантованих (безризикових) наслідків для прийнятого суб'єктом керування рішення. Для моделювання поведінки середовища, що вважається найкращим для суб'єкта керування, Гурвіц запропонував використовувати зважену комбінацію найкращого та найгіршого.

Такий підхід до вибору рішень відомий як критерій показника *песимізму-оптимізму.* Особливістю цього критерію є те, що в ньому передбачається не повний антагонізм середовища, а лише частковий.

Згідно з критерієм Гурвіца у випадку, коли $F = F^+$, оптимальним є рішення

$$x_{k_0}: G^+(x_{k_0};\lambda) = \max_{x_k \in X} G^+(x_k;\lambda),$$

де

$$G^+(x_k;\lambda) = (1-\lambda)\max_{\theta_j \in \Theta} f_{kj}^+ + \lambda \min_{\theta_j \in \Theta} f_{kj}^+; \qquad \lambda \in [0;1].$$

Величину $G_{k\lambda}^+ = G^+(x_k;\lambda)$ називають **λ**-*показником Гурвіца* для рішення $x_k \in X$. Вважають, що рішення x_k буде пріоритетнішим (придатнішим), ніж x_ℓ ($x_k \succ x_\ell$) тоді і тільки тоді, коли $G^+(x_k;\lambda) > G^+(x_\ell;\lambda)$.

1.4. Самостійна робота студентів

Самостійна робота студента є однією з основних складових оволодіння навчальним матеріалом і виконується в позааудиторний час, передбачений тематичним планом навчальної дисципліни.

Під час вивчення навчальної дисципліни студенти повинні навчитися самостійно мислити, поглиблювати засвоєні теоретичні знання, опановувати практичні навики з організації праці менеджера. Розв'язки завдань повинні бути стисло законспектовані у зошиті (у друкованому вигляді).

Для виконання завдання студент обирає варіант згідно наданими йому номером (в журналі) та параметром k.

Перша частина:

1. **Обчислити визначники двома способами:**

а) за допомогою елементарних перетворень;

б) розклавши за елементами рядка (стовпця)

$$\begin{vmatrix} 1 & k+2 & k+3 & -1 \\ -k-2 & 0 & -1 & k+4 \\ k & 1 & k+3 & -2 \\ k+2 & 7 & 1 & -k-4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} k & k+1 & k+2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -k & k+2 & -k-2 & 0 \\ 4 & 4 & k & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2+k \\ -k-1 & -k-2 & 1 & -1 \\ k & k+1 & k & 1 \\ k+1 & k+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2.Знайти добуток матриць AB **і** BA

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Розв'язати системи рівнянь:

а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k-2)x_3 = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} kx_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ (k+4)x_1 + x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Знайти границі функції, які відповідають Вашому варіанту.

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}$. 4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2 + x - 5}{x^2 + x - 2}$.

5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x - 7}$. 6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}$.

7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$. 8. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}$.

9. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}$. 10. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 7x + 6}$. 12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}$.

13. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x - 4}$. 14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 10}$.

15. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}$. 16. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3 - x + 1}{x^3 + 2x - 4}$.

17. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-3x^2 + 4x - 3}{4x^2 - x - 6}$. 18. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3 + 3x - 3}{-5x^2 + x + 2}$.

19. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3 - 7x - 1}{x^4 - 6x + 1}$. 20. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^3 - 4x + 1}{2x^3 + 2x - 4}$.

5.Знайти похідні функцій, які відповідають Вашому варіанту.

1. $y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x.$

2. $y = \dfrac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x.$

3. $y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\operatorname{arctg} x.$

4. $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \arcsin x.$

5. $y = \dfrac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x.$

6. $y=\dfrac{2}{x^6}+10\sqrt[5]{x}-3e^x.$

7. $y=2x^7+8\sqrt[4]{x^3}-\cos x.$

8. $y=\dfrac{8}{x}+4\sqrt{x^3}+2\ln x.$

9. $y=\dfrac{1}{2x^4}-5\sqrt[5]{x^2}+6\sin x.$

10. $y=\dfrac{x^4}{2}+6\sqrt[3]{x^2}-3\cos x.$

11. $y=\dfrac{2}{x^3}+5\sqrt[5]{x^2}-2\arccos x.$

12. $y=\dfrac{1}{3x}-9\sqrt[3]{x^4}-5\cdot 4^x.$

13. $y=\dfrac{2}{5}x^5+8\sqrt[4]{x}-3\operatorname{arcctg} x.$

14. $y=\dfrac{1}{2}x^4+6\sqrt[6]{x^2}-4\log_3 x.$

15. $y=7x^3+3\sqrt{x^5}-3^x.$

16. $y=\operatorname{tg}\left(3x^2+x-2\right).$

17. $y=\operatorname{arctg}\left(2x^2-1\right).$

18. $y=3^{2x^3-4x+3}.$

19. $y=\sqrt[5]{\left(2x^2-4x+5\right)^2}.$

20. $y=\arccos\left(3x^2+5\right).$

6.Обчислити інтеграли:

1. $\int\left(3x^5+\cos x-\dfrac{2}{x^2-9}\right)dx$ **.** **2.** $\int\left(4x^3-5e^x+1\right)dx$ **.**

3. $\int\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{x}+3^x-\sin x\right)dx$ **.** **4.** $\int\left(\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}+4\operatorname{tg}x-9\right)dx$ **.**

5. $\int\left(8x-\dfrac{9}{\cos^2 x}+2\right)dx$ **.** **6.** $\int\left(2x^3-\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}\right)dx$ **.**

7. $\int\left(\sqrt[3]{x}-\operatorname{ctg}x+3\right)dx$ **.** **8.** $\int\left(3x^2-\dfrac{5}{\sin^2 x}+4\right)dx$ **.**

9. $\int\left(5x^4-3e^x+\dfrac{8}{x^3}\right)dx$ **.** **10.** $\int\left(\cos x-\dfrac{4}{x^2+16}+x\right)dx$ **.**

11. $\int\left(5x-3\mathrm{ctg}x+\frac{4}{x^3}\right)dx$. **12.** $\int\left(4^x-\frac{2}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$.

13. $\int\left(x^2-\frac{3}{\sin^2 x}-5\right)dx$. **14.** $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx$.

15. $\int\left(2x^3-\frac{4}{\sqrt{5+x^2}}+7\right)dx$. **16.** $\int\left(4x^5+\frac{6}{\cos^2 x}-5\right)dx$.

17. $\int\left(7\sqrt[4]{x^3}-3e^x+\frac{4}{x}\right)dx$. **18.** $\int\left(3x^2-5\mathrm{tg}x+2\right)dx$.

19. $\int\left(7x^6+\frac{3}{x^2-9}+2\right)dx$. **20.** $\int\left(5x^4+4\sin x-\frac{2}{x}\right)dx$.

Друга частина

Виконання індивідуального варіанту на лабораторно-семінарських заняттях, згідно номеру в журналі. Заархівовані файли формату MS Excel надіслати викладачеві на електронну пошту: tanya.fasolko@gmail.com.

1.5. Індивідуальні завдання

З цієї навчальної дисципліни можливе (за бажанням студента) виконання наукових робіт за наступною орієнтовною тематикою:

Теми рефератів

1. Способи розв’язування систем рівнянь.
2. Розв’язування вправ з аналітичної геометрії.
3. Границя функції однієї і двох змінних.
4. Застосування диференціального числення.
5. Дії з комплексними числами.
6. Основні прийоми інтегрування.
7. Ознаки збіжності числових рядів.
8.Розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку.
9. Розв’язування диференціальних рівнянь вищих порядків.
10. Елементи комбінаторики (розв’язування вправ).
11.Основні теореми теорії ймовірностей.
12.Статистичні оцінки параметрів розподілу.
13.Приклади задач математичного програмування.
14.Задачі дослідження операцій.
15.Розв’язування вправ на СМО.
16.Ігрові задачі з умовами невизначеності та ризику.
17.Основні прийоми розв’язання задач логістики.
18. Використання векторної алгебри, теорії матриць і визначників у економіці.
19. Відшукання границь послідовностей.
20.Застосування похідної в економіці.
21.Задачі лінійного програмування.
22.Задачі, що розв’язуються за транспортним алгоритмом.
23.Задачі цілочислового програмування.
24.Моделі управління запасами.
25.Методи сітьового планування і управління.
26.Дослідження економічних моделей з урахуванням ризику.

1.6. Підсумковий контроль

Підсумковий семестровий контроль проводиться у формі усно-письмового екзамену.

Питання для підсумкового контролю

1. Поняття визначника. Обчислення визначників другого і третього порядків та їх властивості.
2. Поняття про мінори та алгебраїчні доповнення
3. Розклад визначника за елементами його стрічки (стовбця).
4. Обчислення визначників довільного порядку
5. Визначення матриці, їх види
6. Дії над матрицями
7. Обернена матриця та її знаходження
8. Економічні задачі з використанням теорії матриць
9. Системи лінійних рівнянь
10. Метод Крамера.
11. Матричний спосіб розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь
12. Метод Гаусса та Жордано-Гауса
13. Поняття функції. Область визначення і область значень функції. Способи задання функції.
14. Класифікація функцій. Основні функції та їх графіки
15. Умови зростання і спадання функції. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
16. Поняття екстремуму функції. Необхідні та достатні умови екстремуму.
17. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину. Необхідні і достатні умови їх існування на графіках функції.
18. Асимптоти графіка функції,їх знаходження. Повне дослідження функції та побудова її графіка.
19. Границя числової послідовності. Основні теореми про границі числових послідовностей.
20. Границя функції в точці. Поняття про односторонні границі
21. Основні теореми про границі функцій.
22. Перша і друга визначні границі
23. Визначення неперервної функції в точці. Класифікація точок розриву
24. Властивості неперервних функцій на відрізку
25. Означення похідної. Геометричний зміст похідної.
26. Фізичний та економічний зміст похідної
27. Зв’язок між неперервністю та диференційованістю функції
28. Правила диференціювання суми, добутку, частки функцій
29. Похідна від складної функції. Похідна від оберненої функції. Похідні від обернених тригонометричних функцій.
30. Таблиця похідних. Похідні вищих порядків.
31. Означення диференціала. Геометричний зміст диференціала. Основні властивості диференціала
32. Еластичність функції та її властивості. Еластичність попиту відносно ціни. Еластичність пропозиції відносно ціни.
33. Первісна функції та її властивість
34. Невизначений інтеграл та його властивості
35. Таблиця невизначених інтегралів.
36. Методи інтегрування: безпосереднє інтегрування.
37. Методи інтегрування: метод підстановки та інтегрування частинами
38. Поняття раціонального дробу. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

39. Інтегрування правильних раціональних дробів. Інтегрування неправильних раціональних дробів.
40. Поняття визначеного інтегралу та його властивості.
41. Основні поняття про диференціальні рівняння.
42. Диференціальні рівняння першого порядку.
43. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння.
44. Диференціальні рівняння другого порядку
45. Числовий ряд та його збіжність.
46. Необхідна та достатня ознаки збіжності числового ряду. Ознака порівняння рядів.
47. Лінійне програмування. Геометричний і симплексний методи розв'язування ЗЛП
48. Оптимізаційні економіко-математичні моделі
49. Транспортна задача. Метод потенціалів
50. Побудова та дослідження багатофакторної економетричної моделі
51. Розв'язок задач балансовим методом.
52. Імітаційне моделювання: основні поняття та прикладні аспекти
53. Прийняття рішень в умовах повної інформації (визначеності)
54. Системи та методи прийняття рішень в умовах ризику
55. Системи та методи прийняття рішень в умовах невизначеності

1.6.2. Приклад екзаменаційного білету

1. Поняття визначника. Обчислення визначників другого і третього порядків та їх властивості

2. Правила диференціювання суми, добутку, частки функцій.

3. Розв’язати систему рівнянь за правилом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + x_2 - (k-2)x_3 = 7. \end{cases}$$

4. Обчислити інтеграл (метод заміни змінної) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$

2.Схема нарахування балів

1. Нарахування балів студентам з навчальної дисципліни здійснюється відповідно до такої схеми:

Рис. 1. Схема нарахування балів студентам за результатами навчання

2.2. Обсяг балів, здобутих студентом під час лекцій з навчальної дисципліни, обчислюється у пропорційному співвідношенні кількості відвіданих лекцій і кількості лекцій, передбачених навчальним планом, і визначається згідно з додатками 1 і 2 до Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права імені Леоніда Юзькова.

З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення (17+17) 34 лекційних занять за денною формою навчання.

Отже, студент може набрати під час лекцій таку кількість балів:

Кількість лекцій за планом	Кількість відвіданих лекцій																
I семестр	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
17	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	9,0	9,5	10,0

II семестр 17	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	9,0	9,5	10,0

2.3. З цієї навчальної дисципліни передбачено проведення 68 семінарських занять за денною формою навчання.

За результатами семінарського (практичного, лабораторного) заняття кожному студенту до відповідного документа обліку успішності виставляється кількість балів від 0 до 5 числом, кратним 0,5, яку він отримав протягом заняття.

Критерії поточного оцінювання знань студентів наведені у п.4.3.8. Положення про організацію освітнього процесу в Хмельницькому університеті управління та права (затвердженого 29 травня 2017 року, протокол № 14).

2.4. Перерозподіл кількості балів в межах максимально можливої кількості балів за самостійну роботу студентів та виконання індивідуальних завдань, наведено в наступній таблиці:

№ з/п	10 тем	Номер теми										Усього балів
		1-2	3-4	5-7	8-10	11-13	14-16	17-19	22-21	22-23	24	
1.	Максимальна кількість балів за самостійну роботу	4	4	2	2	2	2	2	2	2	2	28
2.	Максимальна кількість балів за індивідуальне завдання	12										12
	Усього балів	-										40

3. Рекомендовані джерела

3.1. Основні джерела

1. Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Собчук В.В. Вища математика для економістів. 2019.
http://www.dut.edu.ua/ru/lib/1/category/725/view/1883
2. Барковський В.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. К.: Центр учбової літератури, 2010. 448 с.
https://app.box.com/s/dwv9reh2y2eek18zynw2pn8xohruvm2i Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. К.:Видав.центр Альматеор, 2003. 520 с.
http://lib.istu.edu.ua/index.php?p=34&id=1134&par=223&page=1
3. Дубовик В.П. Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. К. : Ігнатекс-Україна, 2013. 150 с.
http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/10062/1/56.pdf
4. Рудницький В.Б. Вища математика: навчальний посібник / В.Б. Рудницький, В.І. Делей. Хмельницький, 2004. 308с.
https://studfile.net/preview/5064960/

3.2. Допоміжні джерела

1. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: основні розділи: підручник для студ. вищ. навч. закл.: затв. МОНУ . Київ : Кондор, 2012. 608 с.
2. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посіб.для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. / К.: Либідь, 2007. 720 с.
3. Макаренко В. О. Вища математика для економістів: навчальний посібник. Київ : Знання, 2008. 517 с
4. Мартиненко В.С. Збірник задач з вищої математики . Ч. 1. К.: КНТЕУ, 2000.
5. Мартиненко В.С. Збірник задач з вищої математики Ч. 2. К.: КНТЕУ, 2002.

4. Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. http://profimath.simplesite.com
2. http://fmd57.ucoz.ru/
3. Вища математика – [Електронний ресурс] режим доступу:
   http://alwebra.com.ua/course/view.php?id=97&lang=uk
4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. К. : ТВіМС, 2011. 224 с.
   [Електронний ресурс] режим доступу:
   http://matan.kpi.ua/public/files/Posibnyk%20LA+AG.pdf
5. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум. (І курс І семестр)
   Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б.
6. Федорова. К: НТУУ «КПІ», 2013.
   [Електронний ресурс] режим доступу:
   http://matan.kpi.ua/public/files/PraktykumLAAG.pdf

Розробник навчально-методичних матеріалів:
Викладач дисципліни:
доцент кафедри математики, статистики та інформаційних технологій, кандидат економічних наук, доцент

_________________________ Тетяна ФАСОЛЬКО
11 вересня 2020 року

Схвалено кафедрою математики, статистики та інформаційних технологій 15 вересня 2020 року, протокол № 2.

Завідувач кафедри ______________________ Роман КУЛИНИЧ
15 вересня 2020 року

Декан факультету управління та економіки
_________________________ Тетяна ТЕРЕЩЕНКО
21 вересня 2020 року

Погоджено методичною радою університету 22 жовтня 2020 року, протокол № 2.

Голова методичної ради __________________ Ірина КОВТУН
23 жовтня 2020 року

Обліковий обсяг – 3, 2 ум.др.арк.